UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

56. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 7 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1952)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1952

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

56. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Jaeger, A. Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik 265

Ströher, W. Darstellung des Linienelementes sechster Ordnung durch W-Kurven 288

Prachar, K. Über Primzahldifferenzen I 304

Prachar, K. Über Primzahldifferenzen II 307

Wunderlich, W. Über die Torusloxodromen 313

Aigner, A. Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl 335

Schmetterer, L. Über das Produkt zweier komplexer inhomogener Linearformen 339

Bereis, R. Über die Böschungslinien auf Drehquadriken 344

Buchbesprechungen 352

Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik.

Von

Arno Jaeger, Ibadan (Nigeria).

(Eingelangt am 8. Januar 1952.)

Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung 265
2. Vorbereitungen 267
3. Basissätze 271
4. Lösungen und Lösbarkeit 272
5. Zwei Beispiele partieller Differentialgleichungen 275
6. Lineare Differentialgleichungen 279
7. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 282

1. Einleitung.

Die Behandlung der partiellen Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik schließt sich eng an zwei frühere Arbeiten des Verfassers an[1]. Für die eingeführten Begriffe und Symbole vergleiche man [1][2], sie sind so gewählt, daß die Beweisführungen hier meist denen in [2] analog und manchmal sogar bis auf gewisse Ersetzungen lateinischer durch Frakturbuchstaben fast wörtlich gleich sind. Dennoch werden die in [2] verwandten Argumente oft wiederholt, um den Leser mit der ungewohnten Symbolik vertraut zu machen, und erst in späteren Kapiteln werden die Beweise nur kurz skizziert oder ganz ausgelassen.

Zuerst werden die zu verwendende Vektorsymbolik aufgestellt und einige in [2] eingeführte Definitionen und vorbereitende Sätze vektoriell verallgemeinert. Sodann werden die wichtigen Basissätze für partielle Differentiationen bewiesen:

Sind in einem Körper K von Primzahlcharakteristik $p \neq 0$ eine reguläre Multidifferentiation[3] der Dimension δ und ein δ-Tupel von

[1] Vgl. die Literatur am Schluß.
[2] Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis hin.
[3] Vgl. [1], § 2.

Elementen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_\delta)$ derart gegeben, daß für die Komponenten[3] $D_1, D_2, \ldots, D_\delta$ von $\mathfrak{D}$

$$D_\nu x_\mu = \delta_{\nu\mu}{}^{4}, \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, \delta,$$
$$D_\nu^\lambda x_\mu = 0 \text{ für } 1 < \lambda < p^{t_\nu}; \ \nu, \mu = 1, 2, \ldots, \delta;$$

gilt, so läßt sich jedes Element von K eindeutig als Polynom in $\mathfrak{x}$ vom Formalgrade $p^{t_\nu} - 1$ in x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \delta$) mit $\mathfrak{D}$-konstanten Koeffizienten[3] von Ordnungen $\geqq \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\delta)$, darstellen. (*t-te Basisdarstellung.*)

Die Definition einer *partiellen Differentialgleichung* in einem Körper K von Primzahlcharakteristik erfolgt nun entsprechend wie in [2] unter Verwendung einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$, wieder wird als *Lösung* jedes die Differentialgleichung identisch erfüllende Element y aus einem solchen Erweiterungskörper von K, auf den sich $\mathfrak{D}$ fortsetzen läßt, erklärt. Sind n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \delta$) der höchste Exponent, mit dem die ν-te Komponente D_ν von $\mathfrak{D}$ in der Differentialgleichung mit einem von Null verschiedenen Faktor auftritt, und nichtnegative ganze Zahlen t_ν durch

$$p^{t_\nu - 1} \leqq n_\nu < p^{t_\nu}, \ \nu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

definiert, so heiße $\mathfrak{n}$ die *Formalordnung* und $\mathfrak{t}$ die *Konstanzordnung* der Differentialgleichung.

Drückt man alle in der Differentialgleichung vorkommenden Elemente einschließlich des unbestimmten y in der $\mathfrak{t}$-ten Basisdarstellung in einem noch unbestimmten Erweiterungskörper von K aus, so ist die Bestimmung der Lösungen der Differentialgleichung auf das Auf-

suchen aller Lösungen von $\prod_{\nu=1}^{\delta} p^{t_\nu}$ Gleichungen in ebensovielen Unbekannten in $\mathfrak{D}$-zulässigen Erweiterungskörpern[5] von K zurückgeführt.

Zunächst werden als Beispiele zwei einfache Typen behandelt: Bei reinen Differentialgleichungen

$$D_1^{n_1} D_2^{n_2} \ldots D_\delta^{n_\delta} y = w, \ \mathfrak{n} > \mathfrak{o},$$

lassen sich wie für $\delta = 1$ notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingungen aufstellen und die „allgemeine Lösung"[6] im Falle ihrer Existenz explizit angeben. Für die Differentialgleichung

$$D_1^m y + a D_2^n y = 0, \ 0 \leqq m, n \leqq p - 1,$$

---

[4] $\delta_{\mu\nu}$ bedeute das Kroneckerdelta.
[5] Vgl. [2], Definition 6.

mit konstantem a wird ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung[6] gezeigt; im Spezialfalle der *Laplace*schen Differentialgleichung für $\delta = 2$ läßt sich y als Summe zweier Polynome in $x_1 + i\,x_2$ und $x_1 - i\,x_2$ beziehungsweise vom Formalgrade $p - 1$ mit $2\,p - 1$ beliebigen konstanten Koeffizienten ausdrücken.

Danach werden die linearen Differentialgleichungen allgemein untersucht und obere Schranken für die Anzahl der in der allgemeinen Lösung[6] vorkommenden unabhängigen Parameter angegeben, die von der Formalordnung $\mathfrak{n}$ abhängen. Abschließend werden mit Operatormethoden die Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bestimmt.

2. Vorbemerkungen.

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \ldots; \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots; \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ Vektoren mit Komponenten $a_\nu, b_\nu, \ldots; i_\nu, j_\nu, \ldots; u_\nu, v_\nu, \ldots; C_\nu, D_\nu, \ldots$ beziehungsweise. Die Komponenten seien ganze Zahlen, Elemente eines Körpers, Unbestimmte oder nur formale Symbole, wie jeweils aus dem Zusammenhang hervorgehen wird, ihre Anzahl δ in einem Vektor heiße seine Dimension. Dann bezeichne (im Rahmen der Definierbarkeit):

$$\mathfrak{u}^t = (u_1^t, u_2^t, \ldots, u_\delta^t) \tag{2.1}$$

den *Vektor*, der aus $\mathfrak{u}$ durch Erheben jeder Komponente in die t-te Potenz entsteht,

$$p^{\mathfrak{t}} = (p^{t_1}, p^{t_2}, \ldots, p^{t_\delta}) \tag{2.2}$$

den *Vektor*, dessen ν-te Komponente die t_ν-te Potenz von p ist,

$$\mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{t}}} = (u_1^{p^{t_1}}, u_2^{p^{t_2}}, \ldots u^{p^{t_\delta}}) \tag{2.3}$$

den *Vektor*, der aus $\mathfrak{u}$ durch Erheben der ν-ten Komponente in die p^{t_ν}-te Potenz entsteht,

$$\mathfrak{u}^{\mathfrak{m}} = u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_\delta^{m_\delta} \tag{2.4}$$

den *Skalar*, dessen Faktoren die m_ν-ten Potenzen von u_ν sind,

$$a_{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}} \tag{2.5}$$

den *Skalar*, der zwei Vektorindices $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ besitzt,

[6] Der Ausdruck „allgemeine Lösung" hier ist nicht im Sinne der Analysis gemeint, sondern stellt die natürliche Verallgemeinerung des entsprechenden Begriffes bei gewöhnlichen Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik dar, siehe weiter unten in Definition 5.

$$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} = \binom{m_1}{n_1}\binom{m_2}{n_2}\dots\binom{m_\delta}{n_\delta} \tag{2.6}$$

den *Skalar*, dessen Faktoren Binomialkoeffizienten entsprechender Komponenten sind,

$$\mathfrak{m}! = m_1!\ m_2!\ \dots\ m_\delta! \tag{2.7}$$

den *Skalar*, dessen Faktoren die Fakultäten der Komponenten sind,

$$\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_\delta \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_\delta v_1 & \dots & u_\delta v_\delta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

diejenige *Matrix*, die in der i-ten Zeile und k-ten Spalte das Glied $u_i v_k$ hat,

$$\mathrm{mod}\ \mathfrak{u} \tag{2.9}$$

den *Modul*, der von $u_1, u_2, \dots, u_\delta$ erzeugt wird.

Es möge weiter bedeuten:

$\mathfrak{o}$ den *Nullvektor*, $\mathfrak{O}$ die *Nullmatrix*, $\mathfrak{E}$ die *Einheitsmatrix*, $\mathfrak{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den k-ten *Einheitsvektor*, $\mathfrak{e}$ den *Vektor* $(1, 1, \dots, 1)$, $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, daß alle $m_\nu \leqq n_\nu$ sind; $\mathfrak{m}$ *nicht* $\leqq \mathfrak{n}$, daß nicht alle $m_\nu \leqq n_\nu$ sind; $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, daß $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, aber $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ ist; $\mathfrak{m}$ *nicht* $< \mathfrak{n}$, daß nicht $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ gilt[7]. Mit Ausnahme des klassischen inneren Produktes wird außerdem die übliche Vektorsymbolik verwendet werden.

Zu (2.5) sei Folgendes bemerkt: Wenn im Verlaufe einer Betrachtung die Vektorindices $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nur endlich verschiedene Werte annehmen, so kann man diese $\mathfrak{m}$, und ebenso diese $\mathfrak{n}$, in irgendeiner Weise numerieren und sich dann gemäß dieser Numerierung die Größen $a_{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}$ als Matrix geschrieben denken. Verschiedene Numerierungen werden im allgemeinen zu verschiedenen Matrizen führen, aber sie gehen alle durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auseinander hervor und sind daher in vielen Fragen der linearen Algebra als nicht wesentlich verschieden anzusehen, z. B. haben sie alle den gleichen Rang. Unter Vernachlässigung einer Numerierung kann man aber definieren:

Definition 1: Die Menge aller $a_{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}$, wo $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ endlich viele Werte annehmen, heiße eine *virtuelle Matrix* $\mathfrak{A}$. Führt man eine Numerierung $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_\mu$; $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \dots, \mathfrak{n}_\nu$ dieser $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ein, so heiße die Matrix

[7] Vgl. [1], § 1.

$$a_{\mathfrak{m}_i \mathfrak{n}_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

eine *Realisierung* von $\mathfrak{A}$.

Unter Verwendung des Symbols (2.6) lassen sich viele Binomialrelationen verallgemeinern, indem man einfach die lateinischen Buchstaben durch Fraktur ersetzt, z. B. für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \geqq \mathfrak{o}$:

$$\sum_{\mathfrak{k}=\mathfrak{o}}^{\mathfrak{n}} (-\mathfrak{e})^{\mathfrak{k}} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} \equiv 0 \pmod{p} \text{ für } \mathfrak{n} > \mathfrak{o}, \tag{2.10}$$

$$\binom{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}-\mathfrak{b}} \binom{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{b} \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \equiv \binom{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}} \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \pmod{p}, \tag{2.11}$$

$$\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}} \equiv \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} \pmod{p}^{8}. \tag{2.12}$$

Ähnlich lassen sich die Hilfssätze 1 und 2 in [2] verallgemeinern:
Hilfssatz 1: Es seien

$$n_\mu = \sum_{\nu=0}^{s} n_{\mu\nu} p^\nu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

und

$$k_\mu = \sum_{\nu=0}^{s} k_{\mu\nu} p^\nu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

die p-adischen Entwicklungen der Komponenten n_μ und k_μ zweier ganzzahliger Vektoren $\mathfrak{n}, \mathfrak{k} \geqq \mathfrak{o}$. Dann gilt

$$\binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} \equiv \prod_{\mu=1}^{\delta} \prod_{\nu=0}^{s} \binom{n_{\mu\nu}}{k_{\mu\nu}} \pmod{p}.$$

Hilfssatz 2: Es seien $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s} \geqq \mathfrak{o}$ ganzzahlige Vektoren und $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$. Dann folgt aus $\mathfrak{k} \leqq p^{\mathfrak{s}} - \mathfrak{e}$, $\mathfrak{m} \leqq p^{\mathfrak{s}} - \mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$ *nicht* $\leqq p^{\mathfrak{s}} - \mathfrak{e}$ die Beziehung

$$\binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} \equiv 0 \pmod{p}^{\mathfrak{s}}.$$

Auch die Beweise im [2] lassen sich verallgemeinern, so daß sie hier ausgelassen werden können.

Unter Verwendung der oben eingeführten Symbole ist nun eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in einem Körper K wie folgt definiert[9]: $\mathfrak{D}$ ist die Zuordnung einer δ-fach-Folge von Elementen $\mathfrak{D}^{\mathfrak{o}} z = z, \ldots, \mathfrak{D}^{\mathfrak{k}} z, \ldots$ $(\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{k} < \infty)$ aus K zu jedem Element z aus K mit den drei Eigenschaften:

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} (y + z) = \mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} y + \mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} z, \quad y, z \in K \textit{ Summenregel}, \tag{2.13}$$

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} (y z) = \sum_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{n}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} y \, \mathfrak{D}^{\mathfrak{b}} z, \quad y, z \in K \textit{ Produktregel}, \tag{2.14}$$

---

[8] Vgl. [2], (2.1), (2.2), (2.3) und das 2. Kapitel allgemein.
[9] Vgl. [1], (20).

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}}\,z = \binom{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}\,z, \qquad z \in K \textit{ Iterationsregel.} \tag{2.15}$$

Wenn mit zwei unbestimmten Hilfsvektoren die formalen Potenzreihen

$$y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = y + \sum_{\mathfrak{n}>\mathfrak{o}}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}}\,y, \tag{2.16}$$

$$y_{(\mathfrak{D},\,\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\} = y + \sum_{(\mathfrak{m},\,\mathfrak{n})>\mathfrak{o}}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{v}^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}}\,y$$

eingeführt werden, so sind die Eigenschaften (2.13), (2.14), (2.15) mit

$$(y+z)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} + z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \tag{2.17}$$

$$(y\,z)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}\,.\,z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \tag{2.18}$$

$$y_{(\mathfrak{D},\,\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\} = y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\} \tag{2.19}$$

gleichwertig. Diese Definition ist für Körper mit beliebiger Charakteristik χ sinnvoll, sie führt aber nur im Falle $\chi \neq 0$ zu wesentlich neuen Ergebnissen. Daher wird bei allen in vorliegender Arbeit betrachteten Körpern stillschweigend Charakteristik $p \neq 0$ vorausgesetzt.

In einem Körper K mit einer nichttrivialen Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ existieren Elemente z mit

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}}\,z = 0 \text{ für } \mathfrak{o} < \mathfrak{n} \leqq p^{\mathfrak{t}} - \mathfrak{e}, \text{ aber } \mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{t}}}\,z \neq 0$$

für alle $\mathfrak{t} \geqq \mathfrak{t}_0$, wo $\mathfrak{t}_0$ ein gewisser, von der Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ abhängiger fester Zahlvektor $> \mathfrak{o}$ ist, sie heißen $\mathfrak{D}$-*konstant der Ordnung* $\mathfrak{t}$[10].

In vorliegender Arbeit werden fast ausschließlich *reguläre Multidifferentiationen* $\mathfrak{D}$ verwendet, die dadurch definiert sind, daß für sie und nur für sie ein δ-Tupel $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_\delta)$ von Elementen x_ν aus K existiert, so daß die Funktionaldeterminante $\| \mathfrak{D}\,\mathfrak{x} \| \neq 0$ ist[11]. $\mathfrak{x}$ kann dann sogar so gewählt werden, daß bei fest vorgegebenem $\mathfrak{t}\,(\geqq \mathfrak{e})$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}^{\mathfrak{e}_\nu}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_\nu, && \nu = 1, 2, \ldots, \delta, \\ &\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{o}, \ \mathfrak{o} < \mathfrak{n} \leqq p^{\mathfrak{t}} - \mathfrak{e}, \ \mathfrak{n} \neq \mathfrak{e}_\nu, && \nu = 1, 2, \ldots, \mathfrak{d}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

gilt[12]. Der Buchstabe $\mathfrak{x}$ werde stets als δ-Tupel von Elementen aus K, die (2.20) erfüllen, gebraucht; wie groß man $\mathfrak{t}$ wählen muß, hängt von der Problemstellung ab. Ist $\tau = \operatorname{Max}_{\nu=1,2,\ldots,\delta} t_\nu$, so nenne man $\mathfrak{x}$ auch den τ-*ten Vektor einer* $\mathfrak{D}$-*erzeugenden Folge*[13].

---

[10] Vgl. [1], § 2.
[11] Vgl. [1], § 4.
[12] Vgl. [1], § 6.
[13] Vgl. [1], Satz 7 und Umkehrung.

3. Basissätze.

Satz 1: *Es seien* $\mathfrak{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\delta) > 0$ *ein ganzzahliger Vektor,* $\tau = \operatorname{Max}_{\nu=1,\ldots,\delta} t_\nu$, *K ein Körper mit einer regulären Multidifferentiation* $\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{x}$ *der* τ*-te Vektor einer* $\mathfrak{D}$*-erzeugenden Folge. Dann gibt es für jedes* $z \in K$ *eine eindeutige Darstellung.*

$$z = \sum_{n=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e} z_n \mathfrak{x}^n, \quad z_n \in K_{\mathfrak{D}^{\mathfrak{t}}}{}^{10}, \tag{3.1}$$

wobei die z_n *in K liegen und mindestens* $\mathfrak{D}$*-konstant der Ordnung* $\mathfrak{t}$ *sind, sie heiße* $\mathfrak{t}$*-te Basisdarstellung von z bezüglich* $\mathfrak{D}$, *und es gilt*:

$$z_n = \sum_{m=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e-n} (-\mathfrak{x})^m \binom{m+n}{m} \mathfrak{D}^{m+n} z, \quad 0 \leqq n \leqq p^{\mathfrak{t}} - e{}^{14}. \tag{3.2}$$

Beweis: Einsetzen von (3.2) in (3.1) liefert:

$$z = \sum_{n=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e} \sum_{m=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e-n} (-\mathfrak{x})^m \binom{m+n}{m} (\mathfrak{D}^{m+n} z)\, \mathfrak{x}^n = \sum_{(m+n)\mathfrak{I}=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e} \mathfrak{x}^{\mathfrak{I}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{I}} z \sum_{m=0}^{\mathfrak{I}} (-e)^m \binom{\mathfrak{I}}{m} = z,$$

wobei (2.10) und Hilfssatz 2 verwendet werden. Also läßt sich z in der Form (3.1) mit (3.2) darstellen.

Sodann ist zu zeigen, daß alle z_n in (3.2) mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Ordnung $\mathfrak{t}$ sind. Zunächst folgt aus (2.18)

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}}^m \{u\} = (\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}} \{u\})^m,$$

da aber $\mathfrak{x}$ wegen (2.20) der Kongruenz $\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}} \{u\} \equiv \mathfrak{x} + u \pmod{u^{p^{\mathfrak{t}}}}$ genügt, ergibt sich weiterhin

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}}^m \{u\} \equiv (\mathfrak{x} + u)^m \pmod{u^{p^{\mathfrak{t}}}}, \quad m \leqq p^{\mathfrak{t}} - e,$$

d. h.

$$\mathfrak{D}^n \mathfrak{x}^m = \binom{m}{n} \mathfrak{x}^{m-n}, \qquad m, n \leqq p^{\mathfrak{t}} - e, \tag{3.3}$$

eine häufig verwendete Formel. Nun ist unter Verwendung der Iterationsregel (2.15)

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{I}} z_n = \sum_{a+b=\mathfrak{I}} \sum_{m=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e-n} (-e)^m (\mathfrak{D}^a \mathfrak{x}^m) \binom{n+m}{n} \mathfrak{D}^b \mathfrak{D}^{m+n} z =$$

$$= \sum_{b=0}^{\mathfrak{I}} \sum_{m=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e-n} (-e)^m \binom{m}{\mathfrak{I}-b} \mathfrak{x}^{m-\mathfrak{I}+b} \binom{n+m}{n} \binom{b+n+m}{b} \mathfrak{D}^{b+n+m} z;$$

$$0 < \mathfrak{I} \leqq p^{\mathfrak{t}} - e; \quad 0 \leqq n \leqq p^{\mathfrak{t}} - e.$$

---

[14] Vgl. [2], Satz 2.

Durch die Substitution $c = m + b$ und Änderung der Summationsfolge wird daraus

$$\mathfrak{D}^l z_n = \sum_{c=l}^{p^t+l-e-n} (-e)^c \sum_{\substack{b=c+n-(p^t-e) \\ b\geqq 0}}^{l} (-e)^b \binom{c-b}{l-b} \binom{n+c-b}{n} \binom{c+n}{b} \mathfrak{x}^{c-l} \mathfrak{D}^{c+n} z;$$

$$0 < l \leqq p^t - e, \quad 0 \leqq n \leqq p^t - e,$$

oder wegen (2.11):

$$\mathfrak{D}^l z_n = \sum_{c=l}^{p^t+l-e-n} (-e)^c \Big[\sum_{\substack{b=c+n+e-p^t \\ b\geqq 0}}^{l} (-e)^b \binom{l}{b} \Big] \binom{c}{l} \binom{c+n}{n} \mathfrak{x}^{c-l} \mathfrak{D}^{c+n} z;$$

$$0 < l \leqq p^t - e, \quad 0 \leqq n \leqq p^t - e. \tag{3.4}$$

Für $c + n + e \leqq p^t$ verschwindet der Ausdruck in der großen Klammer wegen (2.10); für $c + n + e$ *nicht* $\leqq p^t$ muß man die zwei Fälle c *nicht* $\leqq p^t - e$ und $c \leqq p^t - e$ gesondert betrachten. Aus c *nicht* $\leqq p^t - e$ folgt wegen $c \leqq p^t + l - e - n$: $c - l \leqq p^t - e$, außerdem ist $l \leqq p^t - e$, und daher wird in diesem Falle $\binom{c}{l} = 0$ nach Hilfssatz 2. Aus $c \leqq p^t - e$ zusammen mit $c + n$ *nicht* $\leqq p^t - e$ und $n \leqq p^t - e$ folgt schließlich $\binom{c+n}{c} = 0$ ebenfalls nach Hilfssatz 2. Einer der drei Zahlfaktoren verschwindet also in jedem Summanden von (3.4), d. h. es gilt wirklich

$$\mathfrak{D}^l z_n = 0 \text{ für } 0 \leqq n \leqq p^t - e, \quad 0 < l \leqq p^t - e.$$

Wäre schließlich die Darstellung (3.2) nicht eindeutig, so ließe sich die Null nichttrivial in der Form (3.2) darstellen. Dann wäre

$$0 = \sum_{n=0}^{p^t-e} z_n \mathfrak{x}^n.$$

Es sei nun m so gewählt, daß $z_m \neq 0$, aber $z_n = 0$ für $n > m$ gilt. Dann folgte durch Bildung der m-ten Ableitung auf beiden Seiten dieser Gleichung $0 = z_m$, also ein Widerspruch.

4. Lösungen und Lösbarkeit.

Definition 2: Es seien $\mathfrak{k}_\mu = (k_{\mu 1}, k_{\mu 2}, \ldots, k_{\mu\delta})$, $\mu = 1, 2, \ldots, a$,

$$\mathfrak{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_\delta),$$

$$\mathfrak{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\delta)$$

Vektoren der Dimension δ mit nichtnegativen ganzen Zahlen als Komponenten, die den Relationen

$$n_\nu = \operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,a} k_{\mu\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

$$n_\nu > 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \delta,$$
$$p^{t_\nu} \leqq n_\nu < p^{t_\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

genügen mögen, und es sei abkürzend

$$n = \max_{\mu=1,\ldots,a} \sum_{\nu=1}^{\delta} k_{\mu\nu}.$$

Weiterhin seien K ein Körper von Primzahlcharakteristik $p \neq 0$, $\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation der Dimension δ in K und $f(u_1, u_2, \ldots, u_a)$ ein Polynom in a unabhängigen Unbestimmten u_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, a$) mit Koeffizienten aus K, in dem alle u_μ effektiv vorkommen. Schließlich seien $\mathfrak{D}^{t_1} y$, $\mathfrak{D}^{t_2} y$, $\ldots$, $\mathfrak{D}^{t_a} y$ weitere a Unbestimmte.

Dann heiße die Gleichung

$$f(\mathfrak{D}^{t_1} y, \mathfrak{D}^{t_2} y, \ldots, \mathfrak{D}^{t_a} y) = 0 \tag{4.1}$$

eine *Multidifferentialgleichung für y in K*. $\mathfrak{n}$ heiße die *Formalordnung* der Multidifferentialgleichung, $\mathfrak{t}$ ihre *Konstanzordnung*, n ihre *Skalarordnung* und δ ihre *Dimension*.

Ist $f(u_1, u_2, \ldots, u_\delta)$ linear (linear und homogen), so heiße auch die Multidifferentialgleichung *linear* (*linear und homogen*). Ist $\mathfrak{D}$ regulär, so heiße (4.1) eine *reguläre Multidifferentialgleichung* oder auch eine *partielle Differentialgleichung*.

Ein Element y aus einem $\mathfrak{D}$-zulässigen Erweiterungskörper K^* von K[15], das die Multidifferentialgleichung identisch erfüllt, heiße eine *Lösung*.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen, auf die sich alle Multidifferentialgleichungen zurückführen lassen, falls K ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper von einer endlichen Anzahl von Unbestimmten über einem Konstantenkörper k und $\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation von K/k ist[16].

Es sei nun y eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (4.1). Dann läßt sich nach dem $\mathfrak{t}$-ten Basissatz y eindeutig in der Form

$$y = \sum_{\mathfrak{n}=0}^{p^{\mathfrak{t}}-e} y_{\mathfrak{n}} \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}} \tag{4.2}$$

darstellen, wo die $y_{\mathfrak{n}}$ $\mathfrak{D}$-konstante Elemente der Ordnung $\geqq \mathfrak{t}$ aus K^* sind und $\mathfrak{x}$ τ-ter Vektor einer $\mathfrak{D}$-erzeugenden Folge ist, wenn $\tau = \max_{\nu=1,\ldots,\delta} t_\nu$

[15] Vgl. [2], Definition 6.
[16] Vgl. [1], § 8.

bedeutete. Unter Verwendung von (3.3) folgt dann, daß

$$f(\sum_i y_i \binom{i}{i_1} \mathfrak{x}^{i-i_1}, \sum_i y_i \binom{i}{i_2} \mathfrak{x}^{i-i_2}, \ldots, \sum_i y_i \binom{i}{i_a} \mathfrak{x}^{i-i_a}) = 0 \qquad (4.3)$$

erfüllt sein muß. Man drücke nun auch die Koeffizienten von $f(u_1, u_2, \ldots, u_a)$ nach dem t-ten Basissatz als Polynome in den x_ν von Formalgraden $p^{t\nu} - 1$ mit Koeffizienten aus dem Körper aller mindestens $\mathfrak{D}$-konstanten Elemente der Ordnung t aus. Beachtet man, daß höhere als $p^t - e$-te „Potenzen" von $\mathfrak{x}$ sicher $\mathfrak{D}$-konstant von mindestens der Ordnung t sind, so läßt sich die linke Seite von (4.3) ebenfalls als Polynom in $\mathfrak{x}$ vom Formalgrade $p^t - e$ mit $\mathfrak{D}$-konstanten Koeffizienten der Ordnung $\geqq t$ aus K^* umschreiben:

$$f(\sum_i y_i \binom{i}{i_1} \mathfrak{x}^{i-i_1}, \ldots, \sum_i y_i \binom{i}{i_a} \mathfrak{x}^{i-i_a}) = \sum_{i=0}^{p^t-e} f_i \mathfrak{x}^i, \; f_i \in K_{\mathfrak{D}^t}\,[\ldots, y_j, \ldots], \qquad (4.4)$$

wobei die f_i auf Grund ihrer Konstruktion Polynome in den $\prod_{\nu=1}^{\delta} p^{t\nu}$ Größen y_j mit Koeffizienten aus $K_{\mathfrak{D}^t}$ sind. Aus dem Verschwinden von (4.4) gemäß (4.3) folgt das gleichzeitige Bestehen der $\prod_{\nu=1}^{\delta} p^{t\nu}$ Gleichungen

$$f_i(\ldots, y_j, \ldots) = 0, \; 0 \leqq i, j \leqq p^t - e. \qquad (4.5)$$

Umgekehrt, sucht man eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (4.1), so setze man y in der Form (4.2) an, wobei die y_i $(0 \leqq i \leqq p^t - e)$ zunächst als Unbestimmte aufzufassen sind. Dann läßt sich der Prozeß, der zu (4.4) führt, wiederholen, und man sieht, daß die Gültigkeit der Gleichungen (4.5) das Bestehen von (4.1) nach sich zieht, vorausgesetzt, daß wirklich

$$\mathfrak{D}^n y = \sum_i \binom{i}{n} y_i \mathfrak{x}^{i-n}$$

erfüllt ist. Kann man also $\mathfrak{D}$-konstante Elemente y_j $(0 \leqq j \leqq p^t - e)$ mit Ordnungen $\geqq t$ aus einem $\mathfrak{D}$-zulässigen Erweiterungskörper K^* von K finden, die (4.5) genügen, so ist (4.2) eine Lösung von (4.1).

Definition 3: Es sei $\mathfrak{M}$ die Nullstellenmannigfaltigkeit der Polynome

$$f_i(\ldots, y_j, \ldots) \qquad 0 \leqq i, j \leqq p^t - e. \qquad (4.6)$$

Eine Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$, bei der sämtliche Nullstellen $\{\ldots, y_j, \ldots\}$ $\mathfrak{D}$-zulässig und mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Ordnung t sind, heiße *lösend*.

Ist $\mathfrak{M}$ lösend, so führen alle und nur die Nullstellen $\{\ldots, y_i, \ldots\}$ von $\mathfrak{M}$ zu Lösungen (4.2) der Differentialgleichung. Ist $\mathfrak{M}$ nicht lösend, so können entweder lösende Teilmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}$ existieren; ist die lösende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ ihre Vereinigungsmenge, so führen alle und nur die Nullstellen von $\mathfrak{M}^*$ zu Lösungen (4.2) der Differentialgleichung. Oder keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$ ist lösend, dann ist die Differentialgleichung unlösbar.

Definition 4: Die Dimension g der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ heiße *Transzendenzgrad der Differentialgleichung.*

Dann läßt sich jede Lösung der Differentialgleichung (4.1) als algebraische Funktion mit höchstens g unabhängigen Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_g$ über K darstellen. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß in Lösungen auftretende Parameter $\mathfrak{D}$-konstant der Ordnung $\geqq t$ sind.

Satz 2: *Es sei* $\{\ldots, y_i, \ldots\}$ *eine Nullstelle von* (4.6), *die g über K unabhängige Parameter* $c_1, c_2, \ldots, c_g$ *enthalte. Die Nullstelle führt dann und nur dann zu einer Lösung* (4.2) *der Differentialgleichung* (4.1), *wenn die zu den* y_i *gehörigen über K* $(c_1, \ldots c_g)$ *irreduziblen Polynome entweder separabel mit* $\mathfrak{D}$*-konstanten Koeffizienten von Ordnungen* $\geqq t$ *oder inseparabel mit Exponentem f und* $\mathfrak{D}$*-konstanten Koeffizienten von Ordnungen* $\geqq t + f$ e *sind.*

Der Beweis verläuft fast ebenso wie in [2] der Beweis des entsprechenden Satzes 8 und kann daher hier ausgelassen werden.

Definition 5: Eine Lösung (4.2) der Differentialgleichung (4.1) heiße *allgemein*, wenn $\{\ldots, y_i, \ldots\}$ eine allgemeine Nullstelle von $\mathfrak{M}^*$ ist. Jede nicht allgemeine Lösung heiße *partikulär*.

Eine Differentialgleichung besitzt also eine allgemeine Lösung dann und nur dann, wenn die lösende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ irreduzibel ist.

Abschließend sei noch bemerkt, daß man sich auf die Untersuchung solcher Differentialgleichungen beschränken kann, bei denen das definierende Polynom $f(u_1, u_2, \ldots, u_a)$, das zu (4.1) führt, über allen $\mathfrak{D}$-zulässigen algebraischen Erweiterungen von K irreduzibel bleibt.

5. Zwei Beispiele partieller Differentialgleichungen.

A. Die reine Differentialgleichung $\mathfrak{D}^n y = w$.

Definition 6: Ein Differentialoperator A heiße *rein*, wenn er sich in der Form $A = \mathfrak{D}^n$ schreiben läßt, wobei $\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation ist. Ist A ein reiner Differentialoperator, so heiße die Multidifferentialgleichung $A\,y = w$ *rein*, und ihre Lösungen seien *(Multi)Integrale* genannt.

Definition 7: Es sei $n_\mu = \sum_{\nu=0}^{r_\mu} n_{\mu\nu} p^\nu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \delta$, die p-adische Entwicklung der μ-ten Komponente eines ganzzahligen Vektors $\mathfrak{n} > \mathfrak{o}$. Dann werde der Operator $\mathfrak{D}^{-\mathfrak{n}}$ durch

$$\mathfrak{D}^{-\mathfrak{n}} = \prod_{\mu=1}^{\delta} \prod_{\nu=0}^{r_\mu} D^{-n_{\mu\nu} p^\nu \mathfrak{n}} \tag{5.1}$$

definiert.

Satz 3: *Es sei*

$$n_\mu = \sum_{\nu=0}^{r_\mu} n_{\mu\nu} p^\nu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \delta,$$

die p-adische Entwicklung der μ-ten Komponente eines ganzzahligen Vektors $\mathfrak{n} > \mathfrak{o}$. Die reine partielle Differentialgleichung

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} y = w, \; w \in K, \tag{5.2}$$

in K für y ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$D^{(p-n_{\mu\nu}) p^\nu} w = 0 \tag{5.3}$$

für alle diejenigen μ, ν $(1 \leqq \mu \leqq \delta, \; 0 \leqq \nu \leqq r_\mu)$ gilt, für die $n_{\mu\nu} \neq 0$ ist. Wenn die Integrabilitätsbedingung (5.3) *erfüllt ist, so wird*

$$y = \mathfrak{D}^{-\mathfrak{n}} w + \sum_{\text{alle } \mathfrak{k} \text{, für die } \binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{n}} = 0} c_{\mathfrak{k}} \xi^{\mathfrak{k}} \tag{5.4}$$

ein allgemeines Integral von (5.1) *in einem Körper, der aus K durch Adjunktion der Parameter $c_{\mathfrak{k}}$ entsteht, und auf den $\mathfrak{D}$ so fortgesetzt ist, daß die $c_{\mathfrak{k}}$ $\mathfrak{D}$-konstant mindestens der Ordnung $\mathfrak{r} + \mathfrak{e}$ sind. Die Summe in* (5.4) *enthält*

$$g(\mathfrak{n}) = \prod_{\mu=1}^{\delta} p^{r_\mu + 1} - \prod_{\mu=1}^{\delta} \prod_{\nu=0}^{r_\mu} (p - n_{\mu\nu}) \tag{5.5}$$

Glieder.

Der Beweis kann aus den Ausführungen zum Satz 9 in [2] durch eine leichte Verallgemeinerung entnommen und daher hier ausgelassen werden.

B. Der Typ

$$D_1^m y + a D_2^n y = 0, \; a \neq 0, \; a \in K_{\mathfrak{D}^{\mathfrak{e}}}, \; 0 < n, m < p.$$

Mit dem Ansatz

$$y = \sum_{\mu,\nu=0}^{p-1} y_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu$$

[17] Vgl. [2], (6.1).

erhält man

$$D_1^m y + a D_2^n y = \sum_{\mu=0}^{p-1-m} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\mu+m}{m} y_{\mu+m,\nu} x_1^\mu x_2^\nu +$$

$$+ a \sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-n} \binom{\nu+n}{n} y_{\mu,\nu+n} x_1^\mu x_2^\nu = \sum_{\mu=0}^{p-1-m} \sum_{\nu=0}^{p-1-n} [\binom{\mu+m}{m} y_{\mu+m,\nu} +$$

$$+ a \binom{\nu+n}{n} y_{\mu,\nu+n}] x_1^\mu x_2^\nu + \sum_{\mu=0}^{p-1-m} \sum_{\nu=p-n}^{p-1} \binom{\mu+m}{n} y_{\mu+m,\nu} x_1^\mu x_2^\nu +$$

$$+ a \sum_{\mu=p-m}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-n} \binom{\nu+n}{n} y_{\mu,\nu+n} x_1^\mu x_2^\nu.$$

Also ergeben sich nach dem Basissatz die folgenden Gleichungen in den $y_{\mu\nu}$:

$$\binom{\mu+m}{m} y_{\mu+m,\nu} + a \binom{\nu+n}{n} y_{\mu,\nu+n} = 0,\ 0 \leqq \mu \leqq p-1-m,\ 0 \leqq \nu \leqq p-1-n, \quad (5.6)$$

$$y_{\mu+m,\nu} = 0, 0 \leqq \mu \leqq p-1-m,\ p-n \leqq \nu \leqq p-1, \quad (5.7)$$

$$y_{\mu,\nu+n} = 0, p-m \leqq \mu \leqq p-1,\ 0 \leqq \nu \leqq p-1-n. \quad (5.8)$$

Man schreibe nun die Elemente $y_{\mu\nu}$ als p-reihige quadratische Matrix $\mathfrak{Y}$, und es seien $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ die folgenden Teilmatrizen:

$\mathfrak{T}$: $y_{\mu,\nu}$, $0 \leqq \mu \leqq m-1$, $0 \leqq \nu \leqq n-1$,

$\mathfrak{N}_1$: $y_{\mu,\nu}$, $m \leqq \mu \leqq p-1$, $p-n \leqq \nu \leqq p-1$,

$\mathfrak{N}_2$: $y_{\mu,\nu}$, $p-m \leqq \mu \leqq p-1$, $n \leqq \nu \leqq p-1$.

Da die Elemente von $\mathfrak{T}$ in (5.6), (5.7), (5.8) überhaupt nicht auftreten, kann man sie durch unabhängige Parameter $c_1, c_2, \ldots, c_{m\,n}$ ersetzen. $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind Nullmatrizen wegen (5.7) und (5.8). Es sei nun $y_{\mu\,\nu}$ ein Element von $\mathfrak{Y}$, und man nenne für den Augenblick die Menge aller

$$y_{\mu+\tau m,\ \nu-\tau n} \qquad \tau \gtreqless 0, \text{ ganz},$$

in $\mathfrak{Y}$ „die durch $y_{\mu\nu}$ definierte Treppe in $\mathfrak{Y}$". Dann zerfällt die Menge aller Elemente von $\mathfrak{Y}$ in Teilmengen solcher Treppen, und die Zugehörigkeit zu einer Treppe definiert eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{Y}$. Treppen, die nur aus einem Element bestehen, mögen „uneigentlich" heißen, alle übrigen Treppen „eigentlich". (5.6) besagt, daß aus der Kenntnis eines Elementes y_m sofort alle übrigen Elemente der Treppe bestimmbar sind. Wegen (5.7) und (5.8) verschwinden also die Elemente aller Treppen, die Elemente in $\mathfrak{N}_1$ oder $\mathfrak{N}_2$ besitzen. Jeder andern Treppe kann man einen Repräsentanten $y_{\mu\nu}$ entnehmen und diesen einem freien Parameter c_λ gleichsetzen, womit alle Elemente von $\mathfrak{Y}$ festgelegt sind.

Bedeute t die Anzahl nicht durch $\mathfrak{N}_1$ oder $\mathfrak{N}_2$ laufender eigentlicher Treppen, so zeigt diese Konstruktion, daß für den Transzendenzgrad g unserer Differentialgleichung

$$g = m\,n + t$$

gilt.

Ein Spezialfall ist die *Laplace*sche Differentialgleichung mit $m = n = 2$. Es sei der Einfachheit halber $p > 2$[18]. Versteht man für das Folgende unter „Diagonalen" nur solche, die von links unten nach rechts oben laufen, so gehören jetzt alle Elemente einer Treppe von $\mathfrak{Y}$ zu Diagonalen, bei denen jedes zweite Element ausgelassen ist. Kann man also beweisen, daß zwei aufeinanderfolgende Elemente einer Diagonale verschwinden, so wird jedes Element dieser Diagonale gleich Null. Wegen (5.8) gilt das zunächst für die mit

$$y_{p-1,\,\nu},\quad \nu = 2, 3, \ldots, p-1,$$

beginnenden Diagonalen. $y_{p-1,\,1}$ gehört zu der durch $y_{2,\,p-2}$ definierten Treppe, verschwindet also wegen (5.7), wegen (5.8) ist aber auch $y_{p-2,\,2} = 0$, also besteht auch die mit $y_{p-1,\,1}$ beginnende Diagonale aus Nullen. Demnach hat $\mathfrak{Y}$ unterhalb der „Hauptdiagonale" (von links unten nach rechts oben) nur Nullen; keines der übrigen Elemente muß aber notwendig verschwinden. Oberhalb und in der Hauptdiagonale bleiben aber $2\,p - 1$ Treppen übrig, also hat die *Laplace*sche Differentialgleichung für $\delta = 2$ den Transzendenzgrad $2\,p - 1$. Rechnet man für festes p die allgemeine Lösung aus, so sieht man, daß die Koeffizienten der freien Parameter (bis aus Faktoren aus dem Primkörper, die man vernachlässigen kann) gerade die formalen Real- und Imaginärteile der 0-ten bis $p - 1$-ten Potenzen von $x_1 + i\,x_2$ sind.

Dieser Zusammenhang mit der klassischen Theorie wird durch die folgende Bemerkung noch klarer: Führt man unter Verwendung der Abkürzung

$$\mathfrak{z} = (z_1, z_2) = (x_1 + i\,x_2,\ x_1 - i\,x_2),\quad i^2 = -1,$$

statt $\mathfrak{D} = (D_1, D_2)$ die *Bidifferentiation* $\mathfrak{C}$ *nach* $\mathfrak{z}$[19] der Eigenschaft $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{z} + \mathfrak{u}$ ein und schreibt die *Laplace*sche Differentialgleichung nach der Kettenregel[19] als Differentialgleichung in $\mathfrak{C}$ um, so nimmt sie die Form $\mathfrak{C}^{\varepsilon}\,y = 0$ an, und deren allgemeine Lösung ist natürlich

---

[18] Für $p = 2$ sind D_1^2 und D_2^2 selbst Differentiationen, d. h. man kann durch Reduktion (vgl. [1], § 2) die Laplacesche Differentialgleichung zu einer mit linearer Skalarordnung machen.

[19] Vgl. [1], § 4.

$$y = c_0 + \sum_{\nu=1}^{p-1} c_\nu z_1^\nu + \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{p-1+\nu} z_2^\nu.$$

Aus den „zwei beliebigen Funktionen von $x_1 + i x_2$ und $x_1 - i x_2$ beziehungsweise", die in dem „allgemeinen Integral" der *Laplace*schen Differentialgleichung im Sinne der Analysis auftreten, sind also hier zwei Polynome vom Formalgrade $p-1$ in $x_1 + i x_2$ und $x_1 - i x_2$ beziehungsweise geworden.

6. Lineare Differentialgleichungen.

$$\sum_{\mathfrak{j}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}} f^{\mathfrak{j}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{j}} y = 0, \quad f^{\mathfrak{j}} \in K, \ 0 \leqq \mathfrak{j} \leqq \mathfrak{m}, \tag{6.1}$$

sei eine lineare homogene partielle Differentialgleichung der Formalordnung $\mathfrak{m}$, Konstanzordnung $\mathfrak{s}$, Skalarordnung m und Dimension δ. Es seien

$$m_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mathfrak{s}_\mu - 1} m_{\mu\nu} p^\nu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \delta, \tag{6.2}$$

die p-adischen Entwicklungen der Komponenten m_μ von $\mathfrak{m}$.

Dann existiert in (6.1) mindestens ein Summand $f^{\mathfrak{n}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} y$ derart, daß

$$f^{\mathfrak{n}} \neq 0, \text{ aber } f^{\mathfrak{j}} = 0 \text{ für } \mathfrak{j} > \mathfrak{n} \tag{6.3}$$

gilt. Es werde für das Folgende ein fester Summand dieser Eigenschaft aus (6.1) herausgegriffen und der Buchstabe $\mathfrak{n}$ für diesen Summanden reserviert. O.B.d.A. werde angenommen, daß die ersten λ ($1 \leqq \lambda \leqq \delta$) Komponenten von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ und nur diese übereinstimmen:

$$\begin{aligned} n_\mu &= m_\mu \text{ für } \mu \leqq \lambda \\ n_\mu &< m_\mu \text{ für } \mu > \lambda. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Schließlich sei

$$f^{\mathfrak{j}} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}} f^{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{b}} \mathfrak{x}^{\mathfrak{b}}, \ f^{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{b}} \in K_{\mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}}, \quad 0 \leqq \mathfrak{j}, \mathfrak{b}, \leqq p^{\mathfrak{s}} - \mathfrak{e}$$

die nach den Basissätzen eindeutige Darstellung der $f^{\mathfrak{j}}$ über $K_{\mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}}$.

Setzt man eine Lösung von (6.1) in der unbestimmten Form (4.2) an, so erhält man unter Benutzung von (3.3)

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{j}} y = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}-\mathfrak{j}} \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{j}}{\mathfrak{j}} y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{j}} \mathfrak{x}^{\mathfrak{a}}, \quad 0 \leqq \mathfrak{j} \leqq p^{\mathfrak{s}} - \mathfrak{e}.$$

Hieraus folgt:

$$f^{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{i}}\,y=\sum_{\mathfrak{b}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}\sum_{\mathfrak{a}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}-1}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}}f^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{b}}\,y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}},\quad \mathfrak{a}\leqq\mathfrak{j}\leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}.$$

Mit den Substitutionen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-p^{\mathfrak{t}}=\mathfrak{d}$ und den zeitweiligen Abkürzungen

$$y_{\mathfrak{t}}=0 \text{ für } \mathfrak{t} \textit{ nicht} \leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e},\tag{6.5}$$

$$f^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{b}}=0 \text{ für } \mathfrak{b} \textit{ nicht} \leqq \mathfrak{b} \text{ und für } \mathfrak{b} \textit{ nicht} \leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}$$

ergibt sich

$$f^{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{D}^{\mathfrak{i}}\,y=\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}f^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}}y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{c}}+\sum_{\substack{\mathfrak{t}>0\\ t_\nu=s_\nu \text{ oder } 0}}\mathfrak{x}^{p^{\mathfrak{t}}}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}f^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{D}+p^{\mathfrak{t}}-\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}}y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{b}},$$

wobei $\mathfrak{t}$ alle möglichen Vektoren >0 zu durchlaufen hat, deren Komponenten t_ν entweder gleich s_ν oder gleich Null sind. Führt man die weitere Abkürzung

$$g^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}}=f^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}}+\sum_{\substack{\mathfrak{t}>0\\ t_\nu=s_\nu \text{ oder } 0}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{t}}\,f^{\mathfrak{i}}_{p^{\mathfrak{t}}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}},\quad 0\leqq\mathfrak{a},\,\mathfrak{c},\,\mathfrak{j}\leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e},\tag{6.6}$$

ein, so nimmt (6.1) die Form an:

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{i}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}}g^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}}\,y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{c}}=0.$$

Wegen des Basissatzes müssen alle Koeffizienten von $\mathfrak{x}$ einzeln verschwinden, d. h.

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{j}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}}g^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}}\,y_{\mathfrak{a}+\mathfrak{j}}=0,\quad 0\leqq\mathfrak{c}\leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e},$$

oder bei Substitution $\mathfrak{a}+\mathfrak{j}=\mathfrak{b}$ unter Berücksichtigung von (6.5):

$$\sum_{\mathfrak{b}=0}^{p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}}\sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{b}}\binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{i}}g^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}+\mathfrak{j}-\mathfrak{b}}\,y_{\mathfrak{b}}=0,\quad 0\leqq\mathfrak{c}\leqq p^{\mathfrak{s}}-\mathfrak{e}.\tag{6.7}$$

Das allgemeine Element $a_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ der virtuellen Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ der $\prod_{\nu=1}^{\delta}p^{s_\nu}$ Gleichungen (6.7) in den $\prod_{\nu=1}^{\delta}p^{s_\nu}$ Unbekannten $y_{\mathfrak{b}}$ hat die Form:

$$a_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}=\sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{b}}\binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{i}}g^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{c}+\mathfrak{j}-\mathfrak{b}}.\tag{6.8}$$

Die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (6.1) lassen sich nun mittels linearer Algebra bei irgendeiner Realisierung von $\mathfrak{A}$ durch

Auswertung von (6.8) gewinnen, dabei ist, abgesehen von der Adjunktion von Parametern, keine Körpererweiterung nötig. Offenbar existiert eine allgemeine Lösung von (6.1), ihr Transzendenzgrad über K ist gleich $\prod_{\nu=1}^{\delta} p^{s\nu} - r$, wenn r der Rang der virtuellen Matrix $\mathfrak{A}$ ist.

Um obere Schranken für diesen Transzendenzgrad g zu erhalten, sind einige Vorbereitungen nötig. Es seien

$$\mathfrak{h}_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, \prod_{\nu=1}^{\lambda} (p^s\mu - m_{\mu\nu})$$

diejenigen $\prod_{\mu=1}^{\lambda} (p^s\mu - m_\mu)$ verschiedenen ganzzahligen Vektoren, für deren Komponenten $h_{\nu\mu}$

$$\begin{aligned} 0 \leqq h_{\nu\mu} &\leqq p^s\mu - m_\mu - 1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, \lambda, \\ h_{\nu\mu} &= 0 \qquad\qquad\ \text{für } \mu = \lambda + 1, \ldots, \delta \end{aligned} \tag{6.9}$$

gilt, und sie seien weiterhin so numeriert, daß

$$\mathfrak{h}_\varkappa \textit{ nicht} \leqq \mathfrak{h}_\imath \text{ für } \imath < \varkappa \tag{6.10}$$

erfüllt ist. Dann ist die virtuelle Matrix $\mathfrak{B}$, definiert durch

$$b_{\mathfrak{h}_\imath\, \mathfrak{h}_\varkappa} = a_{\mathfrak{h}_\imath,\, n+\mathfrak{h}_\varkappa} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{n+\mathfrak{h}_\varkappa} \binom{n+\mathfrak{h}_\varkappa}{\mathfrak{j}} f^{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{h}_\imath - \mathfrak{h}_\varkappa - n - \mathfrak{j}},$$

wo $\mathfrak{h}_\imath$, $\mathfrak{h}_\varkappa$ den Beschränkungen (6.9), (6.10) unterliegen, eine quadratische Teilmatrix von $\mathfrak{A}$ mit $\prod_{\mu=1}^{\lambda} (p^s\mu - m_\mu)$ Reihen. Eine Realisierung von $\mathfrak{B}$ ist durch

$$b_{\imath\varkappa} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{n} \binom{n+\mathfrak{h}_\varkappa}{\mathfrak{j}} f^{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{h}_\imath - \mathfrak{h}_\varkappa - n - \mathfrak{j}} \tag{6.11}$$

gegeben, wobei man $\mathfrak{j}$ wegen (6.3) und (6.9) nur bis n einschließlich zu laufen lassen braucht. Für die Elemente $\mathfrak{b}_{\imath\varkappa}$ mit $\imath < \varkappa$ jenseits der Hauptdiagonale wird wegen (6.10)

$$0 \textit{ nicht} \leqq \mathfrak{h}_\imath - \mathfrak{h}_\varkappa - n - \mathfrak{j}$$

und damit wegen (6.5)

$$\mathfrak{b}_{\imath\varkappa} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}^{p^s}} \text{ für } \imath < \varkappa.$$

Daher sind die Elemente der Hauptdiagonale in (6.11) gleichzeitig die Eigenwerte ihrer Matrix mod $\mathfrak{x}^{p^s}$; für sie ergibt sich

$$\mathfrak{b}_{\imath\imath} \equiv \binom{n+\mathfrak{h}_\imath}{n} f^{\mathfrak{m}}_0 \pmod{\mathfrak{x}^{p^s}},$$

und wenn man in (6.1) wegen (6.3) o.B.d.A. $f^n f_0^n = 1$ normiert,

$$b_{\iota\iota} \equiv \binom{n+b_\iota}{n} \pmod{\mathfrak{x}^{p^s}}. \tag{6.12}$$

Also ist der Rang der Matrix (6.11) mindestens gleich der Anzahl der von Null verschiedenen unter den Größen $\binom{n+b_\iota}{n}$. Zwischen n einschließlich und $(p^{s_1}, p^{s_2}, \ldots, p^{s_\lambda}, n_{\lambda+1}, n_{\lambda+2}, \ldots, n_\delta)$ ausschließlich gibt es aber unter Verwendung von (6.4) genau

$$\prod_{\mu=1}^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{s_\mu - 1} (p - m_{\mu\nu}) \tag{6.13}$$

Vektoren, bei deren Komponenten die p-adischen Koeffizienten nicht kleiner als die entsprechenden p-adischen Koeffizienten der entsprechenden Komponenten von n sind, und nach Hilfssatz 1 ist (6.13) die Anzahl nichtverschwindender Größen $\binom{n+b_\iota}{n}$. Damit ist auch der Rang der virtuellen Matrix (6.8) mindestens gleich (6.13), und es folgt:

Satz 4: *Für den Transzendendenzgrad g der Differetialgleichung* (6.1) *mit* (6.2), (6.3), (6.4) *gilt*:

$$g \leqq \prod_{\mu=1}^{\delta} p^{s_\mu} - \prod_{\mu=1}^{\lambda} \prod_{\nu=0}^{s_\mu - 1} (p - m_{\mu\nu}).$$

Bei Bestimmung von Lösungen einer inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{m} f^i \mathfrak{D}^i y = \sum_{i=0}^{p^s - e} w_i \mathfrak{x}^i, \quad f^i \in K, \; w_i \in K_{\mathfrak{D}^s}, \tag{6.14}$$

wird man ähnlich vorgehen. Man muß dann zunächst feststellen, ob der Rang der virtuellen Matrix (6.8) gleich dem Rang derjenigen virtuellen Matrix ist, die aus (6.8) durch Hinzufügung des virtuellen Spaltenvektors $\mathfrak{w}_b$ entsteht. Wenn dieses nicht der Fall ist, hat (6.14) keine Lösungen, z. B. ist das bei der Differentialgleichung $\mathfrak{D}^e y = \mathfrak{x}^{p^e - e}$ der Fall. Andernfalls setzt sich wie bei Dimension 1 die allgemeine Lösung von (6.14) aus einer partikulären Lösung von (6.14) und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (6.1) zusammen, d. h. dann gilt der Satz 4 auch für (6.14).

7. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ähnlich wie bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich im partiellen Falle Lösungen mit Operatormethoden finden. Es genügt auch hier, die auftretenden Koeffizienten nur als konstant von mindestens der Konstanzordnung

anzunehmen, und in diesem Sinne werde wieder die Abkürzung „mit konstanten Koeffizienten" verstanden.

Definition 8: Es sei K ein Körper von Primzahlcharakteristik mit einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$. Der Ring aller Operatoren

$$\sum_{i=0}^{p^t-e} a_i \mathfrak{D}^i, \quad a_i \in K_{\mathfrak{D}^t},$$

wobei die a_i $\mathfrak{D}$-konstant mindestens der Ordnung t sind, heiße $\mathfrak{D}$-*Operatorenring der Konstanzordnung* t *über* K. Der Ring aller Operatoren

$$\sum_{i=0}^{p^e-e} a_i (\mathfrak{D}^{p^t})^i, \; a_i \in K_{\mathfrak{D}^t},$$

wobei die a_i $\mathfrak{D}$-konstant mindestens der Ordnung t sind, heiße $\mathfrak{D}$-*Operatorenring der reinen Konstanzordnung* t *über* K.

Daß die soeben eingeführten Bereiche Ringe sind, ist wegen der Iterationsregel für Multidifferentiationen klar, aus derselben Regel folgt die Existenz von Nullteilern in diesen Ringen, z. B. wird das Produkt $\mathfrak{D}^{p^e-e} \cdot \mathfrak{D}^e$ der Nulloperator. Es läßt sich nun zeigen, daß jedes Element $A = \sum_{i=0}^{p^t-e} a_i \mathfrak{D}^i$ eines $\mathfrak{D}$-Operatorenringes, für das $a_0 \neq 0$ gilt, ein Inverses $B = \sum_{i=0}^{p^t-e} b_i \mathfrak{D}^i$ im Ring besitzt.

Definition 9: Das Symbol $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_{\mathfrak{c}}$, wobei $\mathfrak{c}$ ($\geqq 0$) ein ganzzahliger Vektor der Dimension δ sei, werde wie folgt definiert: Man entwickle

$$\prod_{\nu=1}^{\delta} (a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + \ldots + a_\nu^{(n)})^{\mathfrak{c}_\nu}$$

formal nach dem Polynomischen Lehrsatz, lasse aber Terme mit Exponenten 0 formal stehen und ersetze danach $\prod_{\nu=1}^{\delta} (a_\nu^{(\mu)})^{d_\nu}$ durch $a_{\mathfrak{d}}^{(\mu)}$:

$$(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_{\mathfrak{c}} = \sum_{\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}} \frac{\mathfrak{c}!}{\prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{c}_\nu!} \prod_{\nu=1}^{n} a_{\mathfrak{c}_\nu}^{(\nu)}\,{}^{20}. \tag{7.1}$$

Das Symbol $(n \dot{\times} a)_{\mathfrak{c}}$ sei eine Abkürzung für das n gleiche Summanden enthaltende Symbol $(a \dot{+} a \dot{+} \ldots \dot{+} a)_{\mathfrak{c}}$.

[20] Als Produkte von Polynomialkoeffizienten sind die auftretenden Koeffizienten auch mod p sinnvoll.

Das Symbol $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{o})}$ werde als die Summe aller derjenigen Glieder von $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots a^{(n)})_{\mathfrak{c}}$ definiert, in denen der Index $\mathfrak{o}$ nicht vorkommt:

$$(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{o})} = (a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_{\mathfrak{c}} \text{ für } a_{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = 0;$$
$$\nu = 1, \ldots, \delta.$$

Satz 5: Es sei

$$A = 1 + \sum_{\mathfrak{j} > \mathfrak{o}}^{p^t - r} a_{\mathfrak{j}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{j}}$$

ein Element des $\mathfrak{D}$-Operatorenringes der Konstanzordnung $\mathfrak{t}^{21}$ über einem Körper K. Dann ist

$$A^{-1} = 1 + \sum_{\mathfrak{j} > \mathfrak{o}}^{p^t - \mathfrak{e}} \sum_{n=1}^{j} (-1)^n (n \dot{\diamond} a)_{\mathfrak{j}}^{(\mathfrak{o})} \mathfrak{D}^{\mathfrak{j}}, \quad j = \sum_{\nu=1}^{\delta} j_\nu, \tag{7.2}$$

ein zweiseitiges Inverses von A.

Beweis: Die Zweiseitigkeit ist klar. Zunächst kann man in (7.2) die Summierung über $\mathfrak{n}$ formal etwa bis $q = \sum_{\nu=1}^{\delta} p^{t_\nu}$ laufen lassen, da in $(n \dot{\diamond} a)_{\mathfrak{j}}$ für $n > \sum_{\nu=1}^{\delta} j_\nu$, $\mathfrak{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_\delta)$ in jedem Summanden ein Faktor $a_{\mathfrak{o}}$ auftritt, also

$$(n \dot{\diamond} a)_{\mathfrak{j}}^{(\mathfrak{o})} = 0 \text{ für } n > j = \sum_{\nu=1}^{\delta} j_\nu \tag{7.3}$$

wird. Dann muß unter Verwendung der Abkürzungen

$$a_{\mathfrak{o}} = 1, \; b_{\mathfrak{o}} = 1, \; b_{\mathfrak{f}} = \sum_{n=1}^{q} (-1)^n (n \dot{\diamond} a)_{\mathfrak{f}}^{(\mathfrak{o})}, \; \mathfrak{o} < \mathfrak{f} \leqq p^t - \mathfrak{e} \tag{7.4}$$

die Gültigkeit der Operatorengleichung

$$A A^{-1} = \sum_{\mathfrak{j}=\mathfrak{o}}^{p^t - \mathfrak{e}} a_{\mathfrak{j}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{j}} \sum_{\mathfrak{f}=\mathfrak{o}}^{p^t - \mathfrak{e}} b_{\mathfrak{f}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{D}^{\mathfrak{o}}$$

bewiesen werden. Nun ist vermöge der Iterationsregel (2.15)

$$A A^{-1} = \sum_{\mathfrak{j}=\mathfrak{o}}^{p^t - \mathfrak{e}} \sum_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{j}} \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} b_{\mathfrak{b}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{j}},$$

und dieses ist dann und nur dann der Einheitsoperator, wenn

---

[21] Auch Satz 15 in [2] läßt sich in entsprechender Form, nämlich ohne den Zusatz „rein" bei der Konstanzordnung, aussprechen.

$$(a \dot{+} b)_\mathfrak{i} = 0 \text{ für } 0 < \mathfrak{i} \leqq p^t - \mathfrak{e}$$

oder

$$a_\mathfrak{i} + (a \dot{+} b)_\mathfrak{i}^{(0)} = -b_\mathfrak{i} \text{ für } 0 < \mathfrak{i} \leqq p^t - \mathfrak{e} \tag{7.5}$$

gilt. Unter Verwendung von (7.4) folgt aber

$$a_\mathfrak{i} + (a \dot{+} b)_\mathfrak{i}^{(0)} = a_\mathfrak{i} + \sum_{0<\mathfrak{k}<\mathfrak{i}} \binom{\mathfrak{i}}{\mathfrak{k}} a_{\mathfrak{i}-\mathfrak{k}} \sum_{n=1}^{q} (-1)^n (n \diamond a)_\mathfrak{k}^{(0)} =$$

$$= a_\mathfrak{i} + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \sum_{0<\mathfrak{k}<\mathfrak{i}} \binom{\mathfrak{i}}{\mathfrak{k}} a_{\mathfrak{i}-\mathfrak{k}} (n \diamond a)_\mathfrak{k}^{(0)}, \quad 0 < \mathfrak{i} \leqq p^t - \mathfrak{e},$$

oder unter neuer Verwendung der Definition 9 und mit (7.3):

$$= a_\mathfrak{i} + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n ((n+1) \diamond a)_\mathfrak{i}^{(0)} = -\sum_{n=1} (-1)^n (n \diamond a)_\mathfrak{i}^{(0)} = -b_\mathfrak{i},$$

also ist (7.5) und damit der Satz bewiesen.

Satz 6: *Ist* $A = 1 + \sum_{\mathfrak{i}>0}^{p^t-\mathfrak{e}} a_\mathfrak{i} \mathfrak{D}^\mathfrak{i}$ *ein Element des* $\mathfrak{D}$*-Operatorenringes der Konstanzordnung* $\mathfrak{t}$ *in einem Körper* K, *so hat die partielle Differentialgleichung* $Ay = w$ *in* K *die eindeutige Lösung* $y = A^{-1} w$, *wobei* A^{-1} *den in* (7.2) *definierten Operator bedeutet.*

Da bei dem Beweise $w \neq 0$ nicht vorausgesetzt wurde, folgt, daß homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nur die triviale Lösung $y = 0$ haben, solange $a_0 \neq 0$ ist.

Wenn dagegen bei einem Element $A = \sum_{\mathfrak{i}=0}^{p^t-\mathfrak{e}} a_\mathfrak{i} \mathfrak{D}^\mathfrak{i}$ eines $\mathfrak{D}$-Operatorenringes $a_0 = 0$ gilt, existiert kein inverser Operator; falls aber A eine reine Konstanzordnung $\mathfrak{t}$ besitzt und außerdem die spezielle Form $A = (\mathfrak{D}^{p^t})^{i\mathfrak{e}} + \sum_{\mathfrak{i}>i\mathfrak{e}}^{p^e-\mathfrak{e}} a_\mathfrak{i} (\mathfrak{D}^{p^t})^\mathfrak{i}$ hat, kann man durch Multiplikation mit einem geeigneten Element A^* des Ringes das Produkt $AA^* = A^*A$ zu dem Vielfachen eines reinen Differentialoperators machen. Zur Konstruktion von A^* muß die in Definition 9 eingeführte Symbolik noch etwas verallgemeinert werden.

Definition 10: Das Symbol $(n \diamond a)_\mathfrak{i}^{(i)}$, $i\mathfrak{e} + \mathfrak{k} \leqq p^e - \mathfrak{e}$; $i > 0$, ganz werde durch

$$(n \diamond a)_\mathfrak{i}^{(i)} = (n \diamond a^{(i)})_\mathfrak{i}^{(0)} \text{ mit } a_\mathfrak{i}^{(i)} = \binom{i\mathfrak{e}+\mathfrak{k}}{i\mathfrak{e}}^{-1} a_{i\mathfrak{e}+\mathfrak{k}} \tag{7.6}$$

definiert.

Diese Definition ist sinnvoll, da $\binom{i\mathfrak{e}+\mathfrak{k}}{i\mathfrak{e}} \not\equiv 0 \pmod{p}$ für $0 < i\mathfrak{e} \leqq p^e - \mathfrak{e}$ ist.

Satz 7:

$$A = \mathfrak{D}^{ie} + \sum_{j>ie}^{(p-1)e} a_j \mathfrak{D}^j$$

sei ein Element eines Operatorenringes der reinen Konstanzordnung c^{22} *über einem Körper K, und es werde A* durch*

$$A^* = 1 + \sum_{j>0}^{(p-1-i)e} \sum_{n=1}^{j} (-1)^n (n \diamond a)_j^{(i)} \mathfrak{D}^j, \quad j = \sum_{\nu=1}^{\delta} j_\nu, \tag{7.7}$$

definiert. Dann gilt $A^*A = AA^* = \mathfrak{D}^{ie}$.

Beweis: Wegen Definition 10 und (7.3) kann in (7.7) n formal bis $q = \sum_{\nu=1}^{\delta} p^{l_\nu}$ fortgesetzt werden. Also muß unter Verwendung der Abkürzungen

$$a_{ie} = 1, b_0 = 1, b_j = \sum_{n=1}^{q} (-1)^n (n \diamond a)_j^{(i)}, \; 0 < j \leqq (p-1-i)e \tag{7.8}$$

die Operatorengleichung

$$\mathfrak{D}^{ie} = AA^* = \sum_{j=ie}^{(p-1)e} a_j \mathfrak{D}^j \sum_{l=0}^{(p-1-i)e} b_l \mathfrak{D}^l = \sum_{j=0}^{(p-1-i)e} \sum_{a+b=j} a_{a+ie} b_b \binom{ie+j}{b} \mathfrak{D}^{ie+j}$$

bewiesen, d. h. die Gültigkeit von

$$a_{ie+j} + \sum_{0<b<j} \binom{ie+j}{b} a_{ie+j-b} b_b = -\binom{ie+j}{j} b_j, \; 0 < j \leqq (p-1-i)e \tag{7.9}$$

gezeigt werden. Nun gilt aber für $j > 0$:

$$a_{ie+j} + \sum_{0<b<j} \binom{ie+j}{b} a_{ie+j-b} b_b = a_{ie+j} + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \sum_{0<b<j} \binom{ie+j}{b} (n \diamond a^{(i)})_b^{(0)} a_{ie+j-b}$$

$$= \binom{ie+j}{ie} a_j^{(i)} + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \sum_{0<b<j} \binom{ie+j}{ie} \binom{j}{b} (n \diamond a^{(i)})_b^{(0)} a_{j-b}^{(i)} = -\binom{ie+j}{ie} b_j,$$

wenn man (7.6) und (2.12) verwendet, und damit ist (7.9) und der Satz bewiesen.

Aus Satz 7 folgt sofort für gewisse lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

Satz 8: *Ist*

$$A = \mathfrak{D}^{ie} + \sum_{j>ie}^{(p-1)e} a_j \mathfrak{D}^j$$

---

[22] Hier ist allerdings der Zusatz „rein" bei der Konstanzordnung wesentlich, weil sonst (7.6) mod p nicht immer definiert ist.

ein Element des $\mathfrak{D}$-Operatorenringes der reinen Konstanzordnung $\mathfrak{c}$ *in einem Körper* K, *so hat die partielle Differentialgleichung* $A\,y = w$ *in* K *dieselben Lösungen wie die reine partielle Differentialgleichung* $\mathfrak{D}^{ie}\,y = A^*\,w$, *wobei* A^* *den in* (7.7) *definierten Operator bedeutet.*

Literatur.

[1] *A. Jaeger:* Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik, J. reine angew. Math., Bd. 190 (1952).

[2] *A. Jaeger,* Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik, Monatsh. f. Math., Band 56 (1952).

Darstellung des Linienelementes sechster Ordnung durch W-Kurven.

Von

Wolfgang Ströher, Wien.

(Eingelangt am 24. Januar 1952.)

Betreibt man Differentialgeometrie einer Transformationsgruppe, so steht man häufig vor der nicht immer einfachen, oft aber lohnenden Aufgabe, Linienelemente einer vorgelegten Ordnung geometrisch zu interpretieren. Zu diesem Zweck wird man besonders Kurven bevorzugen, denen im Rahmen der betrachteten Transformationsgruppe eine ausgezeichnete Rolle zukommt. Befaßt man sich wie im folgenden mit der projektiven Gruppe, so wird man besonders die Geraden, die Kegelschnitte und die W-Kurven heranziehen. Eine W-Kurve ist bekanntlich die Bahn, welche ein Punkt unter Einwirkung einer eingliedrigen, kontinuierlichen Gruppe von Kollineationen beschreibt, deren Fixdreieck auch das Fundamentaldreieck der W-Kurve genannt wird.

Am wünschenswertesten ist nun der Fall, daß durch ein Linienelement einer bestimmten Ordnung jeweils eine einzige Kurve einer projektiv ausgezeichneten Klasse bestimmt ist, wie etwa eine Gerade durch eines ihrer Linienelemente erster Ordnung, ein Kegelschnitt durch eines seiner Linienelemente vierter Ordnung und eine W-Kurve durch eines ihrer Linienelemente siebenter Ordnung. Linienelemente von anderen als den angeführten Ordnungen werden, wenn man von Sonderfällen absieht, eine der genannten Kurven über- oder unterbestimmen. So wird sich im allgemeinen kein Kegelschnitt finden lassen, der ein beliebig vorgegebenes Linienelement fünfter oder sechster Ordnung enthält. Man ist daher genötigt, auf eine umfassendere Klasse von projektiv ausgezeichneten Kurven, die W-Kurven, zurückzugreifen. Diese erscheinen dagegen durch Linienelemente fünfter oder sechster Ordnung unterbestimmt, so daß man bei der Untersuchung von Linienelementen der genannten Ordnungen auf das Studium gewisser Mannigfaltigkeiten von W-Kurven geführt wird.

In vorliegender Arbeit soll die Mannigfaltigkeit von W-Kurven untersucht werden, die sich in einem vorgegebenen Punkte von sechster Ordnung berühren. Da eine W-Kurve durch ein Linienelement siebenter Ordnung eindeutig festgelegt ist, gibt es ∞^1, die obiger Bedingung genügen.

In erster Linie handelt es sich darum, einen Überblick über die Fundamentaldreiecke aller dieser Kurven zu gewinnen. Es zeigt sich zunächst, daß dieselben einer gewissen rationalen Kubik eingeschrieben sind. Über die dadurch auf derselben bestimmten kubischen Involution lassen sich bemerkenswerte Aussagen machen. Des weiteren läßt sich auch ein Kegelschnitt angeben, der diese Dreiecke als Poldreiecke enthält.

Nicht zuletzt erfließen aus nachfolgenden Untersuchungen einige Sätze über W-Kurven, denen der Geometer sein Interesse nicht versagen kann. Insbesondere ergibt sich eine neue Deutung der projektiven Normalen für W-Kurven.

Die Hilfsmittel, die die Lösung obiger Aufgabe gestatten, gehören der natürlichen Geometrie der projektiven Gruppe an. Zunächst sollen daher aus dieser Disziplin die notwendigen Behelfe bereitgestellt werden.

1. Die Relativkoordinaten.

Im Jahre 1906 veröffentlichte *G. Pick* in seiner berühmten Abhandlung: „Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen" eine Verallgemeinerung der natürlichen Geometrie im Sinne von *Cesàro* für n-gliedrige ebene Transformationsgruppen[1]. Insbesondere lassen sich zwei Größen u, v angeben, welche das Analogon zu den Relativkoordinaten eines Punktes in bezug auf das System Tangente — Normale sind und gleichfalls als *Relativkoordinaten* bezeichnet werden. u und v sind nichts anderes als die beiden Invarianten, welche ein Linienelement n—2ter Ordnung e mit einem beliebigen Punkt P besitzt. Das Element e soll durchaus allgemein sein und sich durch eine Transformation der Gruppe in jedes andere allgemeine Element n—2ter Ordnung überführen lassen. Transformationsgruppen, durch welche sich ein beliebiges allgemeines Element n—2ter Ordnung in jedes beliebige andere allgemeine Element überführen läßt, nennt man *transitiv*. Nur von solchen soll im folgenden die Rede sein.

[1] *G. Pick*: Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen. Sitz.-Ber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, math.-naturwiss. Kl. **115**, 139—159 (1906).

Lauten die Transformationsgleichungen der Gruppe, welche von den Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängt

$$x' = f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad y' = g(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

so existieren zu jedem Punkt $P(\xi, \eta)$ in bezug auf ein beliebig vorgegebenes Linienelement $n-2$ter Ordnung $e(x, y, y_1, \ldots, y_{n-2})$* zwei Größen u und v, die Relativkoordinaten

$$u = u(P, e), \; v = v(P, e),$$

welche invariant sind gegenüber Transformationen der vorgelegten Gruppe. *G. Kowalewski* hat diese Größen u, v in folgender einfachen Weise spezialisiert[2]: Legt man ein Element $e^0(x^0, y^0, y_1^0, \ldots, y_{n-2}^0)$ als „*Anfangselement*" zugrunde, so gibt es wegen der vorausgesetzten Transitivität der Gruppe sicher eine Transformation $T_e^{e^0}$, welche das Element $e(x, y, y_1, \ldots, y_{n-2})$ in das Element e^0 überführt. Es gilt also

$$e^0 = (e)\, T_e^{e^0}.$$

Kowalewski bezeichnet nun diejenigen Größen u, v als Relativkoordinaten des Punktes $P(\xi, \eta)$ in bezug auf das Element $e(x, y, y_1, \ldots y_{n-2})$, welche bei der Transformation $T_e^{e^0}$ übergehen in die rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten des Punktes P^0, der aus dem Punkt P vermöge $T_e^{e^0}$ hervorgeht. Symbolisch läßt sich dies folgendermaßen ausdrücken:

$$(u, v) = (\xi, \eta)\, T_e^{e^0}.$$

u und v sind die auf das Anfangselement e^0 normierten Relativkoordinaten des Punktes P in bezug auf das Element e.

Diese Festsetzung von *Kowalewski* läßt für die Relativkoordinaten eines Punktes in bezug auf ein Linienelement $n-2$ter Ordnung immer die Deutung als rechtwinkelige kartesische Koordinaten zu.

Es sei hier noch festgehalten, daß sich auch das *Bogenelement ds* der Gruppe und die *niedrigste Differentialinvariante J* (das Analogon zur *Krümmung* der *Euklid*ischen Geometrie) stets so normieren lassen, daß sich die neuen Ausdrücke beim Übergang zu e^0 auf dx und y_{n-1} reduzieren.

2. Die Identitätsbedingungen.

Von Interesse ist nun folgende Fragestellung: wie ändern sich die Relativkoordinaten u, v eines festen Punktes P in bezug auf ein Linienelement $n-2$ter Ordnung e, wenn dieses längs einer Kurve variiert?

* Das Symbol y_k bezeichnet die k-te Ableitung von y nach x.

[2] *G. Kowalewski*: Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und *Lie*'sche Transformationsgruppen. 1931.

Die Antwort darauf liefert die sogenannte *Identitätsformel*, die von *G. Kowalewski* folgende Gestalt erhielt[3]:

$$\frac{df(u,v)}{ds} = \frac{1}{\Delta_0}\begin{vmatrix} \xi_1^0, \eta_1^0, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1\,n-3}^0, \eta_{1\,n-2}^0, \xi_1(u,v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta_1(u,v)\frac{\partial f}{\partial v} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n^0, \eta_n^0, \eta_{n1}^0, \ldots, \eta_{n\,n-3}^0, \eta_{n\,n-2}^0, \xi_n(u,v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta_n(u,v)\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n-2}^0, \quad J, \quad 0 \end{vmatrix}$$

Darin bedeuten

$$\xi_\nu\, p + \eta_\nu\, q$$

die *Lie*schen *infinitesimalen Grundtransformationen* der Gruppe und

$$\xi_\nu\, p + \eta_\nu\, q + \eta_{\nu 1}\, q_1 + \ldots + \eta_{\nu,\, n-2}\, q_{n-2}$$

ihre *Erweiterungen* auf das Element *e*. Δ_0 ist die *Liesche Determinante*, welche aus der oben angeschriebenen durch Streichung der letzten Zeile und Spalte entsteht.

Da es sich hier um die *projektive* Gruppe handelt, liegen folgende acht infinitesimalen Grundtransformationen vor:

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x(xp + yq),\ y(xp + yq).$$

Das Anfangselement, dessen Wahl frei steht, werde mit

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = z,\ y_6^0 = t \qquad z \neq 0$$

festgelegt. Dann wird die *Lie*sche Determinante $\Delta_0 = -162\, z^2$ und die Identitätsformel erhält die Gestalt

$$\frac{df}{ds} = \frac{z}{6}\left(uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{4t^2}{9z^2}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v} - v\frac{\partial f}{\partial u}\right) +$$
$$+ \frac{t}{3z}\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + 2v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{J}{3z}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v} - v\frac{\partial f}{\partial u}\right).$$

Setzt man nacheinander $f = u$, $f = v$, so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= -1 + \frac{z}{6}uv - \frac{4t^2}{9z^2}(u^2 - v) + \frac{t}{3z}u + \frac{J}{3z}(u^2 - v), \\ \frac{dv}{ds} &= -u + \frac{z}{6}v^2 - \frac{4t^2}{9z^2}uv + \frac{2t}{3z}v + \frac{J}{3z}uv. \end{aligned} \tag{1}$$

Das sind die *Identitätsbedingungen*, welche das Analogon zu den *Cesàro*schen Unbeweglichkeitsbedingungen der metrischen Geometrie darstellen.

[3] *G. Kowalewski*: a. a. O., S. 272—275.

3. W-Kurven.

Eine Kurve ist bis auf eine Kollineation bestimmt, wenn die *projektive Krümmung* J als Funktion $J = J(s)$ der *projektiven Bogenlänge* s bekannt ist. Die Kurven durch das Element e^0 genügen, wie *Kowalewski* gezeigt hat, den Differentialgleichungen (1), wenn man u, v durch x, y ersetzt und vom Anfangswert 0, 0 aus integriert[4]. Ist insbesondere $J = const.$, so ergeben sich die Bahnkurven der projektiven Gruppe, die sogenannten *W-Kurven*. Dabei sind vom reellen Standpunkt aus bekanntlich drei verschiedene Typen zu unterscheiden, deren Gleichungen sich auf folgende Normalformen bringen lassen:

$$1.\ y = x^n, \quad 2.\ r = e^{a\varphi}, \quad 3.\ y = e^x.$$

Sie unterscheiden sich im Hinblick auf die *erzeugende Gruppe* durch deren *Fixgebilde*. Beim ersten Typus sind die drei Festpunkte reell getrennt, beim zweiten sind zwei Fixpunkte konjugiert komplex, beim dritten fallen zwei Fixpunkte zusammen. Läßt man auch komplexe Kollineationen zu, so sind Typus eins und zwei nicht als verschieden anzusprechen, da sie sich ineinander überführen lassen. Es sollen im folgenden aber bloß reelle Verhältnisse ins Auge gefaßt werden.

Man bezeichnet die W-Kurven des ersten und zweiten Typus als *W-Kurven 1. Art*, während man die des dritten Typus *W-Kurven 2. Art* nennt.

Der Vollständigkeit halber sei noch daran erinnert, daß sich als Bahnkurven die Kegelschnitte ergeben, wenn alle drei Fixpunkte zusammenrücken.

4. Die Fundamentalkurve.

Eine W-Kurve hängt bekanntlich von acht Parametern ab[5]. Sie ist also durch eines ihrer Linienelemente *siebenter Ordnung* vollständig bestimmt. Durch ein Linienelement sechster Ordnung e^0 gibt es daher ∞^1 W-Kurven, die sich in dem gemeinsamen Linienelement sechster Ordnung durch die Werte des siebenten Differentialquotienten unterscheiden. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß man über die Invariante J eine Verfügung trifft. Jedem Wert $J = const.$ entspricht also eine und nur eine W-Kurve durch e^0.

Zunächst erhebt sich die Frage nach den *Fundamentalpunkten* einer solchen W-Kurve. Um dieselben festzustellen, muß man das Fixgebilde

[4] *G. Kowalewski*: a. a. O., S. 147—148.

[5] S. etwa: Enz. d. math. Wiss. III, D. 4. S. 204—208 (*Scheffers*).

der sie erzeugenden Kollineationsgruppe aufsuchen. Insbesondere genügt es, das Fixgebilde der infinitesimalen Transformation dieser Gruppe festzustellen, der Transformation also, die das vorgelegte e in sein benachbartes e^* überführt. Durch kontinuierliche Anwendung dieser infinitesimalen Transformation beschreibt das Element e die Kurve.

Der Punkt ξ, η sei nun ein solcher Fixpunkt. Seine Relativkoordinaten bestimmen sich aus den Beziehungen

$$(u, v) = (\xi, \eta)\, T_e^{e0}.$$

Betrachtet man die infinitesimale Transformation, welche e^* nach e führt, so muß wegen der Fixpunktseigenschaft die Beziehung

$$(\xi, \eta) = (\xi, \eta)\, T_{e^*}^{e} \tag{2}$$

statthaben. Die Relativkoordination des Punktes ξ, η in bezug auf das benachbarte e^* ergeben sich definitionsgemäß aus

$$(u + du, v + dv) = (\xi, \eta)\, T_{e^*}^{e0}.$$

Wegen (2) läßt sich aber obige Beziehung noch umformen

$$(u + du, v + dv) = (\xi, \eta)\, T_{e^*}^{e}\, T_e^{e0} = (\xi, \eta)\, T_e^{e0} = (u, v).$$

Daraus folgt

$$du = 0, dv = 0.$$

Durch Nullsetzen der Identitätsbedingungen erhält man also die Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten der Fundamentalpunkte der W-Kurven $J = const.$[6].

Ersetzt man in (1) u und v durch x und y, so sind die aus

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + \frac{z}{6}\, xy - \frac{4t^2}{9z^2}\,(x^2 - y) + \frac{t}{3z}\, x + \frac{J}{3z}\,(x^2 - y), \\ 0 &= -x + \frac{z}{6}\, y^2 - \frac{4t^2}{9z^2}\, xy + \frac{2t}{3z}\, y + \frac{J}{3z}\, xy \end{aligned} \tag{3}$$

berechneten Werte x, y die Koordinaten der Fixpunkte der betreffenden W-Kurve. Durch Elimination von J folgt daraus die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung, der *Fundamentalkurve* c^3

$$6\, z\, x^3 - 2\, t\, x^2\, y + z^2\, y^3 + 4\, t\, y^2 - 12\, z\, x\, y = 0, \tag{4}$$

die sich als Ort der Fundamentalpunkte erweist. Wie man ohne Mühe erkennt, hat c^3 im Ursprung einen Doppelpunkt und dortselbst mit e^0

[6] *G. Kowalewski*: Verallgemeinerte Evolutentheorie. Mh. f. Math. u. Phys. 43, 242—260 (1936).

eine fünfpunktige Berührung. Die von der x-Achse verschiedene Doppelpunktstangente der c^3 erweist sich als die *projektive Normale* der Kurve im betrachteten Punkt, die bekanntlich als zweite Doppelpunktstangente jener Knotenkurve dritter Ordnung $\bar{c}^3$

$$15\,z\,x^3 - 5\,t\,x^2\,y + 2\,z^2\,y^3 + 10\,t\,y^2 - 30\,z\,x\,y = 0$$

definiert ist[7], die im Ursprung mit e^0 acht Punkte gemein hat. Man stellt nun leicht fest, daß die Doppelpunktstangente

$$y = \frac{3\,z}{t}\,x \tag{5}$$

der beiden Kurven c^3 und $\bar{c}^3$ übereinstimmt. Die Polare der projektiven Normalen in bezug auf den Schmiegkegelschnitt des betrachteten e^0 pflegt man als *projektiven Pol* zu bezeichnen.

5. Die Mannigfaltigkeit der Fundamentaldreiecke.

Da alle Fundamentaldreiecke der Kurven $J = const.$ der Fundamentalkurve c^3 (4) eingeschrieben sind, wird auf derselben eine gewisse *kubische Involution* K festgelegt. Jedem Punkt der c^3, aufgefaßt als Eckpunkt eines derartigen Dreieckes, entsprechen zwei weitere Punkte, von denen jeder seinerseits die zwei anderen mit ihm verknüpften bestimmt. Diese Involution K wird also für die Beschreibung der Mannigfaltigkeit aller Fundamentaldreiecke derjenigen W-Kurven, welche ein und dasselbe Linienelement sechster Ordnung enthalten, von entscheidender Wichtigkeit sein.

Um in das Wesen dieser Dreiecksmannigfaltigkeit näher einzudringen werde der c^3 eine Parameterdarstellung zugrunde gelegt. Projiziert man die Punkte der c^3 aus ihrem Doppelpunkt durch die Geraden $y = \lambda\,x$, so entspricht jedem λ-Wert eineindeutig ein Kurvenpunkt, insbesondere der Ursprung den beiden Werten $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{3z}{t}$. Die Koordinaten eines beliebigen c^3-Punktes sind demnach folgende Funktionen des Parameters λ

$$x = 4\,\lambda\,\frac{3\,z - t\lambda}{6\,z - 2\,t\,\lambda + z^2\,\lambda^3}, \quad y = 4\,\lambda^2\,\frac{3\,z - t\,\lambda}{6\,z - 2\,t\,\lambda + z^2\,\lambda^3}. \tag{6}$$

---

[7] *G. Kowalewski*: Ein Beitrag zur projektiven Differentialgeometrie. Mh. f. Math. u. Phys. **48**, 1—18 (1939).

Führt man die Werte (6) für x und y in eine der beiden Gleichungen (3) ein, so ergibt sich die „*Involutionsgleichung*"[8]

$$(16t^3 + 9z^4)\lambda^3 - 60t^2z\lambda^2 + 54z^2t\lambda - 54z^3 + J(36z^2\lambda^2 - 12z\,t\,\lambda^3) = 0,$$

aus welcher man für jeden Wert J die drei Parameterwerte der Eckpunkte des zugehörigen Fundamentaldreieckes entnimmt. Kennt man umgekehrt zwei Werte λ und μ, welche die Involutionsgleichung befriedigen, so läßt sich aus

$$(16t^3 + 9z^4)\lambda^3 - 60t^2z\lambda^2 + 54z^2t\lambda - 54z^3 + J(36z^2\lambda^2 - 12zt\lambda^3) = 0,$$

$$(16t^3 + 9z^4)\mu^3 - 60t^2z\mu^2 + 54z^2t\mu - 54z^3 + J(36z^2\mu^2 - 12zt\mu^3) = 0$$

das J eliminieren. Dieser Vorgang führt auf die „*Verwandtschaftsgleichung*"

$$(9z^4 - 4t^3)\lambda^2\mu^2 + 18zt^2\lambda\mu(\lambda + \mu) - 18z^2t(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) - 54z^2t\lambda\mu + \\ + 54z^3(\lambda + \mu) = 0. \qquad (7)$$

Sie ist in λ und μ symmetrisch und von zweiter Ordnung und liefert für jeden vorgegebenen λ-Wert die beiden Parameterwerte μ des Punktepaares, welches mit Punkt λ zusammen eine Punktgruppe der kubischen Involution auf c^3 erfüllt.

Die Verwandtschaftsgleichung verhilft auch zur Lösung der Frage nach den Doppelelementen der Involution K. Um nämlich alle Punkte zu finden, die mit einem der ihnen entsprechenden zusammenfallen, muß bloß in (7) $\lambda = \mu$ gesetzt werden. Aus der Gleichung

$$(9z^4 - 4t^3)\lambda^4 + 36zt^2\lambda^3 - 108z^2t\lambda^2 + 108z^3\lambda = 0 \qquad (8)$$

folgt die Existenz von *vier* Doppelelementen, von denen eines dem Parameterwert $\lambda_1 = 0$ zukommt. Um auch die übrigen zu finden, substituiere man in (8) $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$. Das liefert die Gleichung

$$\varkappa^3 - \frac{t}{z}\varkappa^2 + \frac{t^2}{3z^2}\varkappa + \frac{9z^4 - 4t^3}{108z^3} = 0,$$

die durch die Umformung $\varkappa = \xi + \frac{t}{3z}$ die Gestalt

$$\xi^3 + \frac{z}{12} = 0$$

[8] *Em. Weyr*: Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Abh. d. kgl. Böhm. Ges. d. Wiss. VI, 7. Bd. (1856), 56 S.

annimmt. Daraus erkennt man, daß es zwei konjugiert komplexe und eine reelle Lösung gibt, wobei im folgenden bloß letztere untersucht werden soll. Für die reelle Wurzel findet man $\xi = -2^{-2/3} 3^{-1/3} z^{1/3}$. λ nimmt schließlich den Wert

$$\lambda_2 = \frac{1}{3^{-1} z^{-1} t - 2^{-2/3} 3^{-1/3} z^{1/3}} \tag{9}$$

an. Den beiden *reellen* Doppelelementen entsprechen zwei Verzweigungselemente

$$\mu_1 = \frac{3z}{t},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3^{-1} z^{-1} t + 2^{1/3} 3^{-1/3} z^{1/3}}. \tag{10}$$

Die zugehörigen W-Kurven sind offenbar spezieller Natur. Den Werten λ_2, μ_2 entspricht eine W-Kurve 2. Art, da zwei Fixpunkte zusammenrücken. Für λ_1, μ_1 rücken alle drei Punkte im Doppelpunkt der c^3 zusammen, und zwar das Doppelelement auf dem Kurvenast, welcher die x-Achse berührt, während das Verzweigungselement auf dem anderen Ast in den Ursprung wandert. Die entsprechende W-Kurve wird durch den Schmiegkegelschnitt

$$x^2 - 2y = 0,$$

der das e^0 fünfpunktig berührt, dargestellt.

Wünscht man nicht bloß die Parameterwerte der Verzweigungs- und Doppelelemente zu kennen, sondern interessieren deren Koordinaten selbst, so lassen sich dieselben leicht aus den Formeln (6) durch Einsetzung der entsprechenden Parameterwerte ermitteln. Man findet für das Verzweigungselement

$$x = \frac{3^{-1} z^{-1} t + 2^{1/3} 3^{-1/3} z^{1/3}}{2^{-1} 3^{-2} z^{-2} t^2 + 2^{1/3} 3^{-4/3} z^{-2/3} t + 2^{-7/3} 3^{-2/3} 5 z^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1} 3^{-2} z^{-2} t^2 + 2^{1/3} 3^{-4/3} z^{-2/3} t + 2^{-7/3} 3^{-2/3} 5 z^{2/3}} \tag{11}$$

und das Doppelelement

$$x = \frac{3^{-1} z^{-1} t - 2^{-2/3} 3^{-1/3} z^{1/3}}{2^{-1} 3^{-2} z^{-2} t^2 - 2^{-2/3} 3^{-4/3} z^{-2/3} t - 2^{-7/3} 3^{-2/3} z^{2/3}}$$

$$y = \frac{1}{2^{-1} 3^{-2} z^{-2} t^2 - 2^{-2/3} 3^{-4/3} z^{-2/3} t - 2^{-7/3} 3^{-2/3} z^{2/3}}. \tag{12}$$

6. Das Linienelement sechster Ordnung.

Mit Rücksicht auf Verwertung in einer späteren Publikation, die sich mit den Linienelementen fünfter und vierter Ordnung befassen soll, wurden bisher alle Entwicklungen unter Zugrundelegung des Anfangselementes

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = z,\ y_6^0 = t \quad z \neq 0$$

durchgeführt.

Nunmehr erscheint es zweckmäßig, eine Spezialisierung des e^0 vorzunehmen. Wegen der Transitivität der Gruppe ist es sicher gestattet, das e^0 in das Element

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = 1,\ y_6^0 = 0$$

zu verlegen. Hier ist also $z = 1, t = 0$. Die Allgemeinheit der folgenden Überlegungen wird dadurch in keiner Weise beeinträchtigt. Zunächst erhält die Fundamentalkurve c^3 die Gestalt

$$6x^3 + y^3 - 12xy = 0,$$

während die Involutions- und Verwandtschaftsgleichungen das Aussehen

$$\lambda^3 + 4J\lambda^2 - 6 = 0, \tag{13}$$

$$\lambda^2\mu^2 + 6(\lambda + \mu) = 0 \tag{14}$$

gewinnen. In dieser vereinfachten Darstellung hat der Doppelpunkt die Parameterwerte $\lambda = 0, \lambda = \infty$, ein allgemeiner Punkt aber die Koordinaten

$$x = \frac{12\lambda}{6 + \lambda^3}, \quad y = \frac{12\lambda^2}{6 + \lambda^3}. \tag{15}$$

Die projektive Normale des Elementes e^0 ist hier die y-Achse, der projektive Pol der Fernpunkt der x-Achse.

Wir greifen nun eine W-Kurve des durch e^0 bestimmten Büschels heraus. Eine solche ist vollkommen durch Angabe ihres Fundamentaldreieckes und des Linienelementes erster Ordnung, gebildet durch den Ursprung und die x-Achse, festgelegt. Diese Angabestücke sind ja äquivalent der infinitesimalen Transformation der erzeugenden Transformationsgruppe.

Im Punkte 0,0 der W-Kurve w sind nun besonders zwei Kegelschnitte von Interesse: erstens der Schmiegkegelschnitt c

$$x^2 - 2y = 0, \tag{16}$$

der w von vierter Ordnung berührt und jener Kegelschnitt k, welcher w

in 0 berührt und ihr Fundamentaldreieck als Poldreieck enthält. Seine Gleichung soll ermittelt werden.

Ein Kegelschnitt, welcher die x-Achse im Ursprung berührt, wird folgendermaßen dargestellt:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y = 0.$$

Sind zwei Punkte $x, y; \xi, \eta$ bezüglich k konjugiert, dann besteht die Relation

$$a_{11}\, \xi\, x + a_{12}\, (x\, \eta + y\, \xi) + a_{22}\, y\, \eta + a_{23}\, (y + \eta) = 0.$$

Sollen nun insbesondere die Punkte auf c^3, deren Parameterwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind, ein Poldreieck bilden, so muß wegen (15) das System

$$12\, a_{11}\, \lambda_i\, \lambda_k + 12\, a_{12}\, \lambda_i\, \lambda_k\, (\lambda_i + \lambda_k) + 12\, a_{22}\, \lambda_i^2\, \lambda_k^2 + a_{23}\, [6\, (\lambda_i^2 + \lambda_k^2) +$$
$$+ \lambda_i^2\, \lambda_k^2\, (\lambda_i + \lambda_k)] = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \qquad (17)$$

gelten. Da die Punkte λ_i ein Tripel der kubischen Involution K auf c^3 erfüllen, genügen sie zu je zweien der Verwandtschaftsgleichung (14)

$$\lambda_i^2\, \lambda_k^2 + 6\, (\lambda_i + \lambda_k) = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \neq k). \qquad (18)$$

Vermöge (18) nimmt das System (17) folgende Gestalt an:

$$6\, a_{11} + a_{12}\, \lambda_i^2\, \lambda_k^2 + 6\, a_{22}\, \lambda_i\, \lambda_k - 6\, a_{23} = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \neq k).$$

Daraus ergibt sich für die a_{ik}

$$a_{11} = a_{23},\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes k lautet daher

$$x^2 + 2\, y = 0. \qquad (19)$$

Hieraus entnimmt man zunächst folgendes: Da die Größen λ_i in der Gleichung von k nicht aufscheinen, sind *alle* Dreiecke, gebildet von den Punktetripeln der kubischen Involution auf c^3 Poldreiecke von k.

Satz 1: *Die Fundamentaldreiecke aller W-Kurven, welche dasselbe Linienelement sechster Ordnung enthalten, sind einer rationalen Kubik c^3 eingeschrieben und sämtlich Poldreiecke eines und desselben Kegelschnittes k.*

Aber auch die Kegelschnitte c und k haben zueinander eine sehr spezielle Lage. Wie man ihren Gleichungen

$$x^2 - 2\, y = 0 \ldots c,$$
$$x^2 + 2\, y = 0 \ldots k$$

entnimmt, berühren sie einander doppelt und zwar im Ursprung und im Fernpunkt der y-Achse. Ferner erkennt man sofort, daß sie in ihren Berührungspunkten entgegengesetzt gleiche Krümmungen besitzen. Da

das Verhältnis der Krümmungen einander berührender Kurven bekanntlich invariant ist (*Mehmke*sche Invariante), so kann man sagen:

Satz 2: *Die Kegelschnitte c und k berühren einander doppelt. Ihre Mehmke'sche Invariante ist* $M = -1$.

Die W-Kurve w weist natürlich dieselbe Krümmung wie c auf. Damit ist gleichzeitig ein bequemes Mittel an die Hand gegeben, in einem ihrer Punkte den Krümmungsmittelpunkt aufzusuchen. Man konstruiert einfach das Krümmungszentrum von k und spiegelt es an der Berührungstangente. Besonders einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn die Gleichung der W-Kurve durch $y = x^n$ gegeben ist. Das soll aber hier nicht im einzelnen durchgeführt werden.

Die Berührungssehne der Kegelschnitte c und k ist die y-Achse. Da diese aber die projektive Normale von w ist, ist damit eine neue geometrische Interpretation der projektiven Normalen für W-Kurven gefunden:

Satz 3: *Die Berührungssehne der Kegelschnitte c und k ist die projektive Normale der W-Kurve w im betrachteten Punkte.*

Die Kegelschnitte c und k besitzen noch eine merkwürdige Eigenschaft, die eine unmittelbare Folge von Satz 2 ist. Jeder der beiden Kegelschnitte ist nämlich in bezug auf den anderen *autopolar*. Das heißt: polarisiert man z. B. c punktweise an k, so reproduziert sich c, nunmehr aber aufgefaßt als Mannigfaltigkeit seiner Tangenten. Der sehr einfache rechnerische Nachweis möge hier unterdrückt werden. Rein begrifflich ist dieser Sachverhalt auch leicht einzusehen. Durch Polarisation an k geht ja das Fundamentaldreieck von w in sich über, desgleichen das Linienelement erster Ordnung $(0, x)$. Durch diese Stücke ist aber die W-Kurve völlig bestimmt. *Auch w ist also autopolar in bezug auf k.* Insbesondere muß sich der Schmiegkegelschnitt c von w in 0 reproduzieren, also gleichfalls autopolar in bezug auf k sein. Aus der Autopolarität folgt, wie man leicht indirekt beweist die doppelte Berührung.

Satz 4: *Die Kegelschnitte c und k sind autopolar.*

Nunmehr soll wieder die Mannigfaltigkeit aller Fundamentaldreiecke einer Betrachtung unterzogen werden. Um eines von ihnen zu bestimmen, kann man zunächst einen Eckpunkt mit dem Parameter λ auf c^3 beliebig vorgeben. Da jedes dieser Dreiecke ein Poldreieck in bezug auf k ist, müssen die zwei restlichen Punkte auf der Polaren l von λ in bezug auf k liegen. Da das Dreieck aber c^3 eingeschrieben ist, liegen sie auch auf der Kurve dritter Ordnung, also im Schnitt von l und c^3. Allerdings erhält man auf diese Weise *drei* Schnittpunkte, von denen bloß zwei in Frage

kommen. Um hier die richtige Auswahl zu treffen, werde die Verschneidung von l und c^3 rechnerisch durchgeführt.

Die Polare eines Punktes ξ, η lautet in bezug auf k nach (19)

$$x\,\xi + y + \eta = 0. \tag{20}$$

Ist nun ξ, η der zu λ gehörige Punkt auf c^3 und μ der Parameterwert eines Schnittpunktes x, y von l mit c^3, so gilt nach (15)

$$\xi = \frac{12\,\lambda}{6 + \lambda^3},\quad x = \frac{12\,\mu}{6 + \mu^3},$$

$$\eta = \frac{12\,\lambda^2}{6 + \lambda^3},\quad y = \frac{12\,\mu^2}{6 + \mu^3}.$$

Führt man diese Werte in (20) ein, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen

$$(\lambda + \mu)\,[\lambda^2\,\mu^2 + 6\,(\lambda + \mu)] = 0.$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades in μ. Die drei Wurzeln μ_i sind die Parameterwerte der Schnittpunkte von l und c^3. Bedeutungsvoll sind allerdings nur die beiden Nullstellen des zweiten Faktors in obiger Gleichung. Er stellt ja die Verwandtschaftsgleichung (14) dar. Die Lösung

$$\mu = -\lambda$$

scheidet aus. Man erkennt sofort, daß μ und λ harmonisch liegen bezüglich der beiden Parameterwerte des Doppelpunktes der c^3. Die Punkte der c^3 lassen sich also paarweise zu Punktepaaren λ, λ' einer gewissen *quadratischen Involution* Q anordnen. Nun ist es leicht, ausgehend von einem Eckpunkt λ, ein Fundamentaldreieck zu konstruieren. Die Polare l von λ bezüglich k scheidet c^3 in drei Punkten, wovon einer der in obiger Involution Q dem Punkt λ entsprechende Punkt λ' ist. Dieser scheidet aus. Die beiden restlichen Schnittpunkte sind Eckpunkte des Fundamentaldreieckes.

Natürlich kann man, um zu einem Fundamentaldreieck zu gelangen, von jedem seiner Eckpunkte ausgehen, indem man die oben besprochene Konstruktion ausführt. Es gibt also zu jedem Eckpunkt λ einen in der Involution Q zugeordneten Punkt λ'. Die drei Punkte λ' stellen die restlichen drei Schnittpunkte des Fundamentaldreieckes der W-Kurve mit c^3 dar.

Eine nähere Untersuchung dieses Sachverhaltes liefert nun die überraschende Tatsache, daß *alle drei Punkte λ' auf einer Geraden liegen.*

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die drei Eckpunkte des Fundamentaldreieckes, so gelten für die λ' die Beziehungen

$$\lambda_1' = -\lambda_1,\ \lambda_2' = -\lambda_2,\ \lambda_3' = -\lambda_3.$$

Die Determinante dieser drei Punkte wird wegen (15)

$$\begin{vmatrix} -12\lambda_1 & 12\lambda_1^2 & 6-\lambda_1^2 \\ -12\lambda_2 & 12\lambda_2^2 & 6-\lambda_2^2 \\ -12\lambda_3 & 12\lambda_3^2 & 6-\lambda_3^2 \end{vmatrix}.$$

Diesem Ausdruck kann man nach bekannten Rechenregeln für Determinanten die Gestalt

$$144\,(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 6)\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

geben. Aus der Involutionsgleichung (13) entnimmt man die Tatsache, daß die Beziehung $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6$ besteht. Der erste Faktor in obigem Produkt verschwindet daher, was die kollineare Lage von λ_1', λ_2', λ_3' zur Folge hat.

Berechnet man die Gleichung der Verbindungsgeraden der λ', so folgt unter Berücksichtigung von (18) und (13)

$$y = \frac{12\lambda_i}{6-\lambda_i^3} = \frac{3}{J}.$$

Variiert man das J, so beschreiben alle diese Geraden ein Büschel mit dem Fernpunkt der x-Achse als Zentrum. Das ist aber der Pol der Projektivnormalen in bezug auf c. Es sei noch kurz darauf hingewiesen, daß man diesen Punkt auch erhält als Schnitt der x-Achse mit der Verbindungsgeraden der drei Wendepunkte der c^3.

Satz 5: *Die Eckpunkte der Fundamentaldreiecke entsprechen den Punktetripeln der durch das Strahlbüschel im projektiven Pol erzeugten kubischen Involution auf c^3 in der quadratischen Involution Q.*

Das Fundamentaldreieck einer W-Kurve hat, wie die Zusammenstellung in Nr. 3 zeigt, mindestens einen reellen Eckpunkt. Er entspreche dem Parameterwert λ. Über die Realitätsverhältnisse der beiden anderen Eckpunkte entscheidet die Diskriminante der Verwandtschaftsgleichung (14)

$$6\lambda^3 - 9.$$

Daraus folgt sofort für die beiden restlichen Eckpunkte

I. μ_i *reell getrennt* . . . . . $\lambda < 2^{-1/3}\,3^{1/2}$,

II. μ_i *konjugiert komplex* . . . . . $\lambda > 2^{-1/3} 3^{1/3}$,

III. μ_i *zusammenfallend* . . . . . $\lambda = 2^{-1/3} 3^{1/3}$.

Im ersten Falle ist die W-Kurve eine kollineare Transformierte einer *Parabel höherer Ordnung*, im zweiten Falle eine Transformierte einer *logarithmischen Spirale*. Wird hingegen $\lambda = 2^{-1/3} 3^{1/3}$, so liegt eine Verzweigungsstelle der kubischen Involution k vor. w wird die einzige (reelle) *Exponentiallinie* durch e^0.

Eine Kurve, die einer der genannten Typen angehört, kann umgekehrt zur Festlegung des e^0 herangezogen werden. Speziell wird man sich zu diesem Zweck gerne der einzigen (reellen) W-Kurve 2. Art durch das e^0 bedienen. Dabei gelingt der Übergang von dieser besonderen W-Kurve zum Büschel der ∞^1 W-Kurven 1. Art durch e^0 ohne Schwierigkeit. Man erkennt nämlich sogleich, daß die Fundamentalkurve c^3 durch die Forderung vollständig bestimmt ist, im betrachteten Punkt einen Knoten zu besitzen, dortselbst die vorgelegte Exponentiallinie von vierter Ordnung zu berühren und schließlich deren Fundamentalpunkte zu enthalten. Nunmehr gelingt es in der oben angeführten Weise, alle W-Kurven 1. Art durch das Element e^0 zu konstruieren.

Dem Verzweigungselement $\lambda = 2^{-1/3} 3^{1/3}$ entspricht das Doppelelement $\mu = -2^{2/3} 3^{1/3}$, in welchem zwei der drei Fundamentalpunkte zusammengerückt sind. Dieses Doppelelement erhält man noch durch eine andere Erwägung: i. a. wird der Punkt λ auf c^3 mit seiner Polaren l als Trägerin der beiden restlichen Fundamentalpunkte nicht zusammenfallen. Dies tritt nur ein, wenn λ ein Punkt des Kegelschnittes k ist. Daraus folgt, daß Doppelelemente in den Schnittpunkten von c^3 und k zu erwarten sind. Tatsächlich liefert das System

$$6x^3 + y^3 - 12xy = 0,$$
$$x^2 + 2y = 0$$

die wesentliche Lösung

$$x = 2^{1/3} 3^{1/3}, \quad y = -2^{2/3} 3^{2/3},$$

woraus sich wiederum das bekannte Ergebnis

$$\mu = \frac{y}{x} = -2^{2/3} 3^{1/3}$$

für das Doppelelement reproduziert. Die doppeltgezählte Fundamentalgerade der so festgelegten W-Kurve 2. Art ist dann die Tangente an k in dem soeben ermittelten Punkt. Diese schneidet aus c^3 den Verzwei-

gungspunkt, dessen Polare in bezug auf k die zweite, einfache Fundamentalgerade ist, die man auch Verzweigungsgerade nennt.

Schließlich erhält man das Doppelelement noch auf folgende Weise: man legt die von der x-Achse verschiedene reelle Tangente an c^3 aus dem projektiven Pol. Dem Berührungspunkt entspricht in der Involution Q der Doppelpunkt, dem weiteren Schnittpunkt der Tangente mit c^3 der Verzweigungspunkt.

Es wäre nun naheliegend, mit den entwickelten Hilfsmitteln auch die Linienelemente fünfter und vierter Ordnung zu behandeln. Man hätte also die ∞^2, bzw. ∞^3 W-Kurven 1. Art zu untersuchen, die diese Elemente enthalten. Dies würde leicht auf unzweckmäßige Weitläufigkeiten führen, die sehr bald den Überblick erschwerten.

Daher ist es bei dieser Aufgabe vorteilhafter, die W-Kurven 2. Art ins Auge zu fassen und derart die untersuchten Mannigfaltigkeiten um eine Dimension zu reduzieren.

Die hier aufgeworfenen Fragen mögen jedoch einer eigenen Mitteilung vorbehalten bleiben.

Über Primzahldifferenzen.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 8. Februar 1952.)

1.

Van der Corput hat gezeigt, daß fast alle geraden Zahlen als Differenz zweier ungerader Primzahlen darstellbar sind. Er bediente sich dabei der analytischen Methoden von *Hardy-Littlewood* und *Vinogradoff*. In dieser Note zeigen wir elementar mit der von *Schnirelmann* geschaffenen Schlußweise[1] den schwächeren

Satz 1: *Die Zahlen der Form* $p - p'$, *wo* p, p' *alle Paare von Primzahlen mit* $p' < p$ *durchlaufen, haben positive Dichte.*

In Satz 1 brauchen die p', p nicht aufeinanderfolgende Primzahlen zu sein. Es entsteht nun die Frage, „wie viele" Zahlen in der Form $p_{k+1} - p_k$ darstellbar sind, wo $p_k < p_{k+1}$ aufeinanderfolgende Primzahlen sind. Darüber zeigen wir

Satz 2: *Auch die Zahlen* z, *die sich in der Form* $z = p_{k+1} - p_k$ (*wo* $p_k < p_{k+1}$ *aufeinanderfolgende ungerade Primzahlen sind*) *schreiben lassen, haben positive Dichte.*

Es bleibt offen, ob hier ein Analogen zum *van der Corput*'schen Resultat gilt, ob also fast alle geraden Zahlen sich als Differenz zweier aufeinanderfolgender ungerader Primzahlen schreiben lassen.

2.

Beweis von Satz 1: Wir benützen zum Beweis das bekannte *Lemma*[2]: Die Lösungszahl von

$$y = p - p',\ p \leqq x\ (y \geqq 1, \text{ fest}) \tag{1}$$

ist höchstens

[1] S. z. B. *Landau*, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge 1937, Kap. 2. Dieses Buch zitieren wir mit *Landau* und Angabe der Seitenzahl.

[2] *Landau*, S. 54.

$$c\frac{x}{\log^2 x}\sum_{q|y}\frac{1}{q},\ (c>0 \text{ konstant}). \tag{2}$$

Weiters benützen wir die folgende bekannte Tatsache. Es ist[3], wenn noch

$$g(y)=\sum_{q|y}\frac{1}{q}$$

gesetzt wird,

$$\sum_{y\leqq A}\{g(y)\}^2<c_1 A, \text{ wo } c_1 \text{ ein Konstante}^4. \tag{3}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir hier den kurzen Beweis dieser Tatsache wieder: Man hat

$$\sum_{y\leqq A} g^2(y)=\sum_{y\leqq A}\sum_{b|y}\frac{1}{b}\sum_{d|y}\frac{1}{d}.$$

Wenn mit $\{b,d\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von b und d bezeichnet wird, so ist $\{b,d\}\geqq\sqrt{b\,d}$ und

$$\sum_{y\leqq A}\sum_{b|y}\frac{1}{b}\sum_{d|y}\frac{1}{d}=\sum_{b\leqq A}\sum_{d\leqq A}\frac{1}{b\,d}\left[\frac{A}{\{b,d\}}\right]\leqq\sum_{b\leqq A}\sum_{d\leqq A}\frac{1}{bd}\frac{A}{\sqrt{b\,d}}<$$

$$<A\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{3/2}}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^{3/2}}<c_1 A.$$

Nun sei $f(y)$ die Lösungszahl von $p-p'=y\leqq x$ und $M(x)$ die Anzahl der *verschiedenen* $y\leqq x$, die sich in der Form $p-p'=y$ schreiben lassen. Dann ist nach (2), (3)

$$\sum_{y\leqq x} f^2(y)\leqq c^2\frac{x^2}{\log^4 x}\sum_{y\leqq x} g^2(y)<c_2\frac{x^3}{\log^4 x} \tag{4}$$

und

$$\sum_{y\leqq x} f(y)=\sum_{0<p-p'\leqq x,\,p\leqq x}.1>c_3\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Aus der *Schwarz*'schen Ungleichung folgt dann mit (4)

$$c_3^2\frac{x^4}{\log^4 x}<(\sum_{y\leqq x} f(y))^2\leqq M(x)\sum_{y\leqq x} f^2(y)<M(x)\,c_2\frac{x^3}{\log^4 x}$$

und $M(x)>c_4 x$ womit Satz 1 bewiesen ist.

Beweis von Satz 2: Es läßt sich leicht einsehen, daß es mehr als

---

[3] *Landau*, S. 55. Vgl. auch *Erdös* und *Renyi*, Simon Stevin (27) 1949, S. 121.

[4] Mit c_i werden durchwegs positive Konstante bezeichnet.

$$\gamma \frac{x}{\log x}$$

Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen $p_k < p_{k+1} \leqq x$ gibt, welche $\leqq K \log x$ sind. Hiebei sind γ und K passende positive Konstanten. Setzt man nämlich $d_k = p_k - p_{k-1}$, so ist

$$\sum_{p_k \leqq x} d_k < x$$

Insgesamt gibt es mehr als $c_5\, x/\log x$ solche Differenzen und wenn sich γ und K nicht den obigen Bedingungen gemäß wählen ließen, wäre dies ein Widerspruch. Sei nun $t(z)$ die Anzahl der Lösungen von

$$p_{k+1} - p_k = z,\ p_{k+1} \leqq x,$$

wo p_k, p_{k+1} aufeinanderfolgende Primzahlen sind. Dann hat man nach (2)

$$t(z) < f(z) < c \frac{x}{\log^2 x}\, g(z).$$

Daraus folgt nach (3)

$$\sum_{z \leqq K \log x} t^2(z) < c \frac{x^2}{\log^4 x} \sum_{z \leqq K \log x} g^2(z) < c_6 \frac{x^2}{\log^3 x}. \tag{5}$$

Andererseits ist nach dem oben gesagten

$$\sum_{z \leqq K \log x} t(z) = \sum_{\substack{p_{k+1} - p_k \leqq K \log x \\ p_{k+1} \leqq x}} 1 > \gamma \frac{x}{\log x} \tag{6}$$

und aus (5) und (6) ergibt sich, wieder unter Benützung der *Schwarz*'schen Ungleichung, wenn man mit $A(x)$ die Anzahl der *verschiedenen* $z \leqq K \log x$ bezeichnet, die von der Form $p_{k+1} - p_k$ sind,

$$\gamma^2 \frac{x^2}{\log^2 x} < \Big(\sum_{z \leqq K \log x} t(z)\Big)^2 \leqq A(x) \sum_{z \leqq K \log x} t^2(z) \leqq A(x)\, c_6 \frac{x^2}{\log^3 x}.$$

Daraus folgt $A(x) > c_7 \log x$. Setzt man $x = e^N$, so ist damit gezeigt: Es gibt mehr als $c_7 N$ verschiedene Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen, die $< K N$ sind. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Zusatz bei der Drucklegung: Wie mir Herr Dr. *W. Knödel* freundlicherweise mitteilt, ist die Behauptung von Satz 2 auch in einer Arbeit von ihm enthalten, die sich derzeit im Druck befindet,

Über Primzahldifferenzen II.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 4. März 1952.)

1.

In Satz 2 des ersten Teiles dieser Arbeit wurde gezeigt, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen in der Menge der positiven ganzen Zahlen positive Dichte haben. Dieses Resultat soll auf Primzahlen einer arithmetischen Reihe ausgedehnt werden. In 2. beweisen wir

Satz 1: Seien D, l feste natürliche Zahlen mit $0 < l < D$, $(D, l) = 1$, $q_1 < q_2 < \ldots$, seien die der Größe nach geordneten Primzahlen der arithmetischen Progression $\nu D + l$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Dann gibt es mehr als[1]

$$c \frac{x}{D}$$

natürliche Zahlen $n \leqq x$, die in der Form $n = q_{k+1} - q_k$ geschrieben werden können.

In 3. zeigen wir, daß in Analogie zu einem Satz von *P. Erdös*[2] folgendes gilt:

Satz 2: Es gilt (mit den Bezeichnungen von Satz 1)

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{q_{k+1} - q_k}{\log q_k} < C \varphi(D), \text{ wo } C < 1.$$

Ein Resultat von *P. Erdös* und *A. Renyi*[3] besagt folgendes: Wenn mit $p_1 < p_2 < \ldots$ alle Primzahlen bezeichnet werden und $d_k = p_{k+1} - p_k$ gesetzt wird, so gilt

$$\sum_{p_{k+2} \leqq x} \frac{|d_{k+1} - d_k|}{p_k} > c \log x \tag{1}$$

---

[1] Mit c soll eine positive Konstante bezeichnet werden, die nicht immer denselben Wert haben muß.

[2] *P. Erdös*, Duke Journal *6*.

[3] *P. Erdös* und *A. Renyi*, Simon Stevin *27*, 115 (1949/50).

d. h. die Größe der Primzahldifferenzen „wechselt sehr stark". Man kann fragen, ob sich diese Schwankungen aufheben, wenn man statt des Absolutbetrages der ersten Differenzen der Folge d_k in (1) die höheren Differenzen betrachtet. In 3. zeigen wir, daß dies nicht der Fall ist; genauer zeigen wir allgemeiner

Satz 3: $\Delta^m a_n$ sei die m-te Differenz der Folge a_n[4]. Dann gilt (mit den Bezeichnungen von Satz 1); wenn $d_k = q_{k+1} - q_k$ gesetzt wird

$$\sum_{q_{n+m+1} \leqq x} \frac{1}{q_n} |\, \Delta^m d_n \,| > c \log x$$

wo die Konstante c nur von m abhängt.

2.

Für den Beweis der angeführten Tatsachen benötigen wir einige Hilfssätze.

Lemma 1: Seien $a_0, a_1, \ldots, a_m$ feste durch D teilbare natürliche Zahlen. Dann ist die Anzahl der $q_k \leqq x$, für die $d_k = a_0$, $d_{k+1} = a_1 \ldots d_{k+m} = a_m$ ist (Bezeichnungen wie in Satz 3), kleiner als

$$c_1 \frac{x}{D \log^{m+2} x} W(a_0)\, W(a_0+a_1) \ldots W(a_0+a_1+\ldots+a_m) \left[\frac{D}{\varphi(D)}\right]^{m+2},$$

$$\text{wo } c_1 = c_1(m) > 0 \text{ und } W(a) = \prod_{\substack{p \mid a \\ p \nmid D}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Dieses Lemma kann mit Hilfe der *Brun'schen* Methode bewiesen werden (vgl. *Erdös-Renyi* loc. cit. Lemma 1, wo der Spezialfall $D = 1$, $m = 1$ ausgesprochen wird).

Lemma 2: Sei $\pi(x; D, l)$ die Anzahl der $q_k \leqq x$. Dann ist

$$\frac{1-\varepsilon}{\varphi(D)} \frac{x}{\log x} < \pi(x; D, l) < \frac{1+\varepsilon}{\varphi(D)} \frac{x}{\log x} \quad \text{für} \quad x > x_0(D, \varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Dies ist der Primzahlsatz für die arithmetische Progression.

Lemma 3: Es ist

$$S = \sum_{z < x,\, z \equiv 0 (D)} W^2(z) < c \frac{x}{D}$$

Beweis: Im folgenden durchlaufen die Zahlen z, p, d folgende Bereiche $z \leqq x$, $z \equiv 0 \pmod{D}$, $p \leqq x$, $p \nmid D$, $d \leqq x$, $(d, D) = 1$ und $\omega(n)$

[4] D. h. $\Delta^m a_n = a_{n+m} - \binom{m}{1} a_{n+m-1} + \ldots + (-1)^m a_n$.

bedeutet die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n. Es ist

$$S = \sum_{z} \sum_{d \mid z} \frac{|\mu(d)|}{d} 2^{\omega(d)} = \sum_{d} \frac{|\mu(d)|}{d} 2^{\omega(d)} \sum_{z \equiv 0 \pmod d} 1$$

Wegen $(d, D) = 1$ ist die Anzahl der $z \leqq x$ mit $z \equiv 0\,(d)$, $z \equiv 0\,(D)$ nicht größer als $x \mid (d\,D)$, also

$$S \leqq \frac{x}{D} \sum_{d} \frac{|\mu(d)|}{d^2} 2^{\omega(d)} \leqq \frac{x}{D} \prod_{p<x} \left(1 + \frac{2}{p^2}\right) < c \frac{x}{D}$$

Lemma 4: Es gilt

$$R = \sum_{A<z<A+B,\, z \equiv (\mathrm{mod}\ D)} W(z) < \frac{c}{D} (B + \varphi(D) \log (A + B)).$$

Beweis:

$$R = \sum_{z} \sum_{d \mid z, (d,D)=1} \frac{|\mu(d)|}{d} < \sum_{\substack{d<A+B \\ (d,\,D)=1}} \frac{1}{d} \left(\frac{B}{d\,D} + 1\right) < \frac{c}{D} (B + \varphi(D) \log (A+B)).$$

Beweis von Satz 1: Es gibt mehr als $c_2\, x \mid (\varphi(D) \log x)$ Primzahlen $q_k \leqq x$ für die $d_k < c_3\, \varphi(D) \log x$, wenn c_2 und c_3 passend gewählt werden. Dies folgt aus Lemma 2 und der Tatsache, daß

$$\sum_{p_{k+1} \leqq x} d_k \leqq x.$$

Sei nun $t(z)$ die Anzahl der Lösungen von $q_{k+1} - q_k = z$ und $A(x)$ die Anzahl der verschiedenen $z \leqq c_3\, \varphi(D) \log x$, die in der Form $z = q_{k+1} - q_k$ mit $q_{k+1} \leqq x$ darstellbar sind. Nach dem soeben bemerkten ist

$$S_1 = \sum_{z < c_3\, \varphi(D) \log x} t(z) > \frac{c_2 \cdot x}{\varphi(D) \log x}$$

nach Lemma 1 mit $m = 0$ hat man

$$S_2 = \sum_{z < c_3\, \varphi(D) \log x} t^2(z) < \frac{c\, x^2}{D^2 \log^4 x} \left[\frac{D}{-\varphi(D)}\right]^2 \sum_{\substack{z \equiv 0 \pmod D \\ z < c_3\, \varphi(D) \log x}} W^2(z) < c \frac{x^2\, D}{\varphi^3(D) \log^3 x}$$

wegen Lemma 3. Aus der *Schwarz*'schen Ungleichung folgt $S_1^2 \leqq A(x)\, S_2$, also

$$A(x) > c \frac{\varphi(D)}{D} \log x$$

Setzt man $c_3\, \varphi(D) \log x = N$, so sieht man: Es gibt mehr als $(c \mid D) N$ verschiedene Differenzen $q_{k+1} - q_k$ die $< N$ sind, womit Satz 1 bewiesen ist.

Beweis von Satz 2: Seien $\frac{1}{2}x < q_{i+1} < q_{i+2} < \ldots < q_{i+n+1} \leqq x$ alle Primzahlen im Intervall $(\frac{1}{2}x, x]$ die $\equiv l \pmod{D}$ sind.

Nach Lemma 2 ist

$$n > (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)\frac{x}{\varphi(D)\log x},\ \varepsilon > 0,\ x > x_0(\varepsilon, D). \tag{2}$$

Wenn $\delta_j = q_{i+j+1} - q_{i+j}$ gesetzt wird, so hat man

$$S = \sum_{j=1}^{n} \delta_j < \tfrac{1}{2}x \tag{3}$$

Sei nun $\delta > 0$; δ wird später noch genauer festgelegt. J sei das Intervall $[(1-\delta)\varphi(D)\log x, (1+\delta)\varphi(D)\log x]$.

Nach Lemma 1

$$\sum_{\delta_j \subset J} 1 = A_1 \leqq c_1 \frac{Dx}{[\varphi(D)\log x]^2} \sum_{z \equiv 0 \pmod{D}, z \subset J} W(z) < \frac{2\delta c_4 x}{\varphi(D)\log x}$$

wegen Lemma 4. Nun wähle man δ so, daß $2\delta c_4 < 1/6$, also

$$A_1 < \frac{1}{6}\frac{x}{\varphi(D)\log x} \tag{4}$$

Wäre immer $\delta_j > (1-\delta)\varphi(D)\log x$, so hätte man

$$S = \sum_{i\ \delta_j \subset J} \delta_j + \sum_{\delta_j > (1+\delta)\varphi(D)\log x} \delta_j > [A_1(1-\delta) + (n - A_1)(1+\delta)]\varphi(D)\log x$$

Nach (2) und (4) folgt

$$S \geqq {}^1/_6 x(1-\delta) + (\tfrac{1}{2} - \varepsilon - {}^1/_6)x(1+\delta) = x(\tfrac{1}{2} + \frac{\delta}{6} - \varepsilon(1+\delta))$$

und dies ist ein Widerspruch zu (3) da $\delta > 0$ und ε beliebig klein gewählt werden kann. Damit ist bewiesen

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\delta_j}{\log x} < C\varphi(D),\ C < 1$$

und daher auch

$$\liminf \frac{\delta_j}{\log q_{i+j}} < \liminf \frac{\delta_j}{\log \frac{1}{2}x} < C\varphi(D),\ C < 1.$$

3.

Beweis von Satz 3: Im folgenden durchläuft q_k die Primzahlen $\leqq x$ mit $q_k \equiv l \pmod{D}$ und i die Zahlen 0, 1, 2, ..., m. Wir setzen weiters

$$T = \sum_{d_{n+i} < \lambda\varphi(D)\log x} |\Delta^m d_n| \frac{1}{q_n} = \sum \frac{1}{q_n} |d_{n+m} - \binom{m}{1} d_{n+m-1} + \ldots + (-1)^m d_n|$$

wo $\lambda > 0$ später noch genauer festgelegt wird. Es genügt zu zeigen[5] $T > c\,\varphi(D)\log x$. Zu diesem Zweck wird zunächst gezeigt: die Anzahl der d_n mit „kleinem" $|\Delta^m d_n|$ ist auch „klein". (Vgl. *Erdös-Renyi*, loc. cit. Lemma 3.) Genauer zeigen wir

Lemma 5: Wenn ε, λ, M positive Konstanten bedeuten und die ganze Zahl $k > k_0(\varepsilon, \lambda, M)$ genommen wird, so ist die Anzahl Z der n mit $e^{(k-1)M} < q_n < e^{Mk}$, $d_{n+i} < l_1 = \lambda(k-1)M\varphi(D)$ und $|\Delta^m d_n| < \delta = \varepsilon M k \varphi(D) / \lambda^m$ kleiner als

$$c_5 \frac{\varepsilon e^{Mk}}{\varphi(D)\, k\, M}$$

Beweis: Die Anzahl der q_n mit $e^{(k-1)M} < q_n < e^{kM}$ und $d_{n+i} = a_i$ bezeichnen wir mit $Z(a_0, \ldots, a_m)$. Dann ist nach Lemma 1

$$Z = \sum Z(a_0, \ldots, a_m) < \sum_{a_i < l_1, |\Delta^m a_0| < \delta;\ a_0 < l_1, \ldots a_{m-1} < l_1,\ |\Delta^m a_0| < \delta} \sum Z(a_0, \ldots, a_m) <$$

$$< c \frac{e^{kM}}{D\,(k\,M)^{m+2}} \left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^{m+2} \sum W(b_0) \ldots W(b_m)$$

wo in der letzten Summe über folgende Werte der b_i zu summieren ist: $-l_1 m < b_j < l_1 m$ für $j = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$, $\alpha - \delta < b_m < \alpha + \delta$, wo α sich aus $b_1, \ldots, b_{m-1}$ folgendermaßen ausdrückt

$$\alpha = \binom{m+1}{1} b_{m-1} - \binom{m+1}{2} b_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} \binom{m+1}{m} b_0,$$

Nach Lemma 4 folgt

$$Z < c \frac{e^{kM}}{D\,(k\,M)^{m+2}} \left[\frac{D}{\varphi(D)}\right]^{m+2} \left(\sum_{|b| < l_1 m} W(b)\right)^m \frac{\delta}{D} < c \frac{e^{kM}}{\varphi(D)\, k\, M}$$

für $k > k_0$ womit Lemma 5 bewiesen ist.,

Wir betrachten nun die Differenzen d_n des Intervalles $J = (e^{(k-1)M}, e^{kM})$. Man kann auch nach Lemma 2 M so groß nehmen, daß ihre Anzahl größer als $c_6 e^{Mk} / [2\,M\,k\,\varphi(D)]$ ist, wo c_6 eine passende Konstante mit $0 < c_6 < 1$ ist. Die Gesamtsumme der Differenzen aus J ist $< e^{Mk}$, also ist die Anzahl derjenigen mit $d_n \geqq l_1$ kleiner als e^{Mk} / l_1.

Läßt man aus J alle q_n weg, für die mindestens ein $d_{n+i} \geqq l_1$ ist, so bleiben noch mehr als

---

[5] In diesem Abschnitt hängen die Konstanten noch von m ab.

$$\left(\frac{c_6}{2}-\frac{3m}{\lambda}\right)\frac{e^{Mk}}{Mk\varphi(D)}$$

von den q_n übrig, für die dann also $d_{n+i} \leqq l_1$. Von diesen können nach Lemma 5 höchstens $c_5 \varepsilon e^{Mk} / [k M \varphi(D)]$ auch noch so beschaffen sein, daß $|\Delta^m d_n| < \varepsilon k M \varphi(D) / \lambda^m$.

Nun wählt man λ so groß und ε so klein, daß

$$\left(\frac{c_6}{2}-\frac{2m}{\lambda}-c_5\varepsilon\right)>\frac{c_6}{4}$$

und erhält: Die Anzahl der q_n aus J mit $d_{n+i} < \lambda M (k-1) \varphi(D)$ und $|\Delta^m d_n| > \varepsilon M k \varphi(D) / \lambda^m$ ist größer als $c_6 e^{Mk} / (4 M k) \varphi(D)$. Daher wird (für $k > k_0$)

$$T_k = \sum_{q_n \subset J} |\Delta^m d_n| / q_n > \frac{\varepsilon c_6}{4 \lambda^m}$$

und

$$T > \sum_{k_0 < k < \log x/M} T_k > c\varphi \sum_{k_0 < k < \log x/M} .1 > c \log x,$$

womit Satz 3 bewiesen ist.

Über die Torusloxodromen.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingelangt am 7. April 1952.)

Über die *Torusloxodromen* — jene auf der Oberfläche eines Torus gezogenen Kurven, die dessen Meridian- oder Parallelkreise unter konstantem Winkel durchsetzen — ist schon öfters geschrieben worden, nicht zuletzt an dieser Stelle: Zunächst hat *A. Puchta*[1] ihre Differentialgleichung integriert, in seiner (stellenweise recht anfechtbaren) Mitteilung jedoch keinerlei geometrische Eigenschaften erwähnt. Erst *E. Müller*[2] erfaßte die Torusloxodromen konstruktiv, indem er sie durch *achsiale Winkelstreckung* oder *-stauchung* mit den *Villarceauschen Kreisen* in Verbindung brachte, deren Loxodromeneigenschaft schon früher erkannt worden war[3]. Einen höheren Standpunkt nimmt endlich *K. Strubecker* ein[4], der im Rahmen der durch stereographische Projektion gewonnenen Versinnlichung des dreidimensionalen sphärischen Raumes im elliptischen Kugelgebüsch die Loxodromen der Ringfläche als *Abbilder sphärischer Schraublinien* kennzeichnet. Im übrigen wurden die Torusloxodromen auch wiederholt im Zusammenhang mit der elementar ausführbaren *konformen Abbildung* der Ringfläche auf die Ebene erwähnt[5].

Trotz alledem muß gesagt werden, daß eine wirklich eingehende Untersuchung dieser interessanten Kurven noch immer ausständig ist;

---

[1] *A. Puchta*: Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring. Mh. Math. Phys. **1**, 443—450 (1890).

[2] *E. Müller*: Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. **26**, 73—96 (1917), insb. Nr. 7.

[3] *Schoelcher*: Théorie générale des hélices. AFAS 1891.

[4] *K. Strubecker*: Zur sphärischen Raumgeometrie. Mh. Math. Phys. **38**, 275—290 (1931).

[5] *G. Holzmüller*: Elementares über die Dupinschen Zykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie. Z. Math. Phys. **44**, 194—213 (1899). — *J. Haag*: Étude du tore rapporté aux cercles d'Yvon Villarceau. Nouv. Ann. Math. **66**, 115—130 (1907).

man scheint sich ja noch nicht einmal die Mühe genommen zu haben, eine brauchbare *Parameterdarstellung* zu entwickeln. Dies wird hiemit nachgetragen, wobei die drei Grundtypen des Torus, die sich durch die Realität der Knotenpunkte unterscheiden, getrennt behandelt werden. Im Verlauf des Studiums treten dann auch etliche bemerkenswerte, bisher anscheinend nicht festgestellte *geometrische Eigenschaften* der Torusloxodromen zu Tage. So ist hervorzuheben, daß sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer Torusloxodrome ein koachsiales Drehhyperboloid berühren. Eine solche „*Leitfläche*" besitzt übrigens auch die *Planevolute* der Loxodrome, die überhaupt weitgehend ähnlichen Charakter zeigt. Ferner wurde bislang wohl vollkommen übersehen, daß die Loxodromen mit den „*D-Linien*" des Torus identisch sind, nämlich jenen von *G. Darboux* eingeführten Flächenkurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren. Besonders hingewiesen sei endlich auf eine hübsche *kinematische Erzeugung* der Ringloxodromen mittels eines *Bennettschen Isogramms*, die ein räumliches Seitenstück zur Erzeugung der ebenen Radlinien mittels eines rotierenden Gelenkparallelogramms darstellt.

Der darstellend-geometrischen Auswertung des behandelten Fragenkreises wurde, guter Wiener Tradition folgend, besonderes Augenmerk zugewandt.

1. Die Loxodromen des Spindeltorus.

Der den Betrachtungen zugrundeliegende *Torus* Φ sei stets durch den Mittenkreisradius a und den Meridiankreisradius b festgelegt. Zur analytischen Beschreibung wird ein kartesisches Normalkoordinatensystem x, y, z verwendet, dessen Nullpunkt das Flächenzentrum O ist und dessen z-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt. Die Normalprojektion auf die xy-Ebene wird stets als „Grundriß" angesprochen.

Unter der Voraussetzung $a < b$ treten auf der Achse zwei *reelle konische Knotenpunkte* I, J auf, deren Zentralabstand $\pm c$ sich aus

$$c^2 = b^2 - a^2 \tag{1.1}$$

ergibt. Wird einer der beiden Knoten, etwa $I\,(0, 0, c)$, zum Zentrum einer *Inversion* $\mathfrak{J}$ gemacht, so verwandelt dieselbe den Torus Φ in einen koachsialen *Drehkegel* Φ_0 mit dem halben Öffnungswinkel

$$\alpha = \arccos \frac{a}{b} = \arcsin \frac{c}{b}. \tag{1.2}$$

Den Meridiankreisen des Torus entsprechen dabei die Erzeugenden des Kegels. Es ist bequem, die Inversionskugel Γ durch $J(0, 0, -c)$ gehen zu lassen, weil dieser Punkt dann festbleibt und Φ_0 mit dem Tangentialkegel des Knotens J zusammenfällt (Abb. 1).

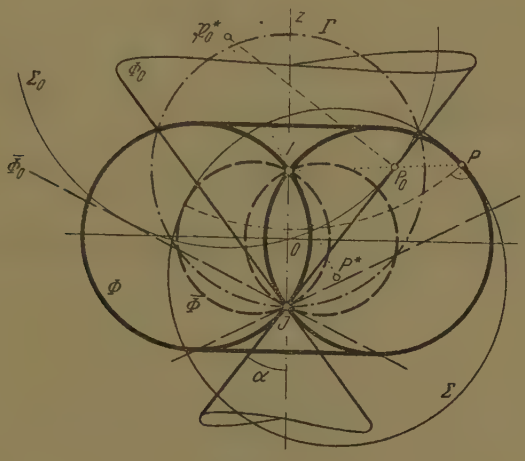

Abb. 1.

Auf Grund der Winkeltreue der Inversion können die *Loxodromen* des Torus Φ nun unmittelbar aus den Loxodromen des Drehkegels Φ_0 abgeleitet werden, die ihrerseits wohlbekannt sind: Es handelt sich um die sogenannten *„zylindro-konischen Spiralen"*, Böschungslinien, die als *Bahnkurven eingliedriger Ähnlichkeitsgruppen* aufgefaßt werden können[6]. Eine solche Kurve k_0 geht bei Verebnung des Kegelmantels in eine logarithmische Spirale über, deren Schnittwinkel σ mit dem vorgeschriebenen Meridianschnittwinkel der zugehörigen Torusloxodrome k übereinstimmt. Sämtliche Bahnkurven der k_0 erzeugenden Ähnlichkeitsgruppe („Spiralung") erscheinen im *Grundriß* als kongruente und konzentrische *logarithmische Spiralen*, deren Schnittwinkel ϑ durch

$$p = \operatorname{ctg} \vartheta = \sin \alpha \operatorname{ctg} \sigma = \frac{c}{b} \operatorname{ctg} \sigma \qquad (1.3)$$

bestimmt ist.

[6] Enz. math. Wiss. III D 4, 252f. — Hinsichtlich der konstruktiven Behandlung vgl. *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Mh. Math. Phys. **46**, 248—265 (1938).

Wird der laufende Ortsvektor $\mathfrak{x}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ der *Kegelloxodrome* unter Benützung des Polarwinkels φ als Parameter und der eingeführten Konstanten a, b, c und p — ohne Einschränkung der Allgemeinheit — nunmehr durch

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{c}{b} \begin{cases} 2c\ e^{p\varphi} \cos\varphi \\ 2c\ e^{p\varphi} \sin\varphi \\ \pm 2a\ e^{p\varphi} - b \end{cases} \tag{1.4}$$

angesetzt, dann liefert die Inversion $\mathfrak{J}$, beschrieben durch

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{c} = 4c^2 \frac{\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{c}}{(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{c})^2} \qquad \text{mit } \mathfrak{c}\,(0, 0, c) \tag{1.5}$$

nach kurzer Rechnung die Parameterdarstellung der *Torusloxodrome* in der Form

$$\boxed{\mathfrak{x} = \frac{c}{b \operatorname{ch} p\varphi \mp a} \begin{cases} c\cos\varphi \\ c\sin\varphi \\ b\operatorname{sh} p\varphi \end{cases}} \tag{1.6}$$

Die dargestellte Loxodrome verläuft, wenn bei a das obere Vorzeichen genommen wird, auf dem apfelförmigen Außenmantel des Torus (der von der oberen Kegelhälfte herrührt), andernfalls auf dem spindelförmigen Innenteil (herrührend von der unteren Kegelhälfte). Die Loxodrome liegt beidemal symmetrisch zur x-Achse ($\varphi \leftrightarrow -\varphi$) und nähert sich mit $\varphi \to \pm\infty$ asymptotisch den beiden Knotenpunkten I und J, was ihren transzendenten Charakter deutlich macht. Entsprechend der Spiegelung an der Ebene $z_0 = -c$, die die beiden Kegelhälften miteinander vertauscht, gehen die beiden Loxodromenarten durch Inversion an der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ ineinander über.

Der *Grundriß* der Loxodrome hat die Polargleichung $r(b \operatorname{ch} p\varphi \mp a) = c^2$ und kann als i/p-fach um einen Brennpunkt winkelgestreckte Hyperbel aufgefaßt werden. Der *Zentralriß* aus der Torusmitte O auf eine achsennormale Ebene — etwa $z=b$ — hat die Polargleichung $r \operatorname{sh} p\varphi = c$ und ist das namenlose Seitenstück der sogenannten *Poinsot*schen Spirale $r \operatorname{ch} p\varphi = \text{const}$.

Die *konstruktive Behandlung* der Loxodromen des Spindeltorus wird am besten auf jene der zylindro-konischen Spiralen zurückgeführt[6]. Es ist aber ohne weiteres möglich, auch direkt aus zwei gegebenen Loxodromenpunkten P, Q beliebig viele weitere zu konstruieren: Man ermittle zunächst die den Torus längs des Parallelkreises von Q orthogonal schneidende Kugel, invertiere P

an derselben und spiegle den so gewonnenen Punkt an der Meridianebene von Q; der so gefundene Punkt R gehört sicherlich dem Torus an, der bei beiden Transformationen erhalten bleibt, und liegt auch auf der Loxodrome PQ, welche durch die (winkeltreue) Produkttransformation in sich übergeführt wird, weil

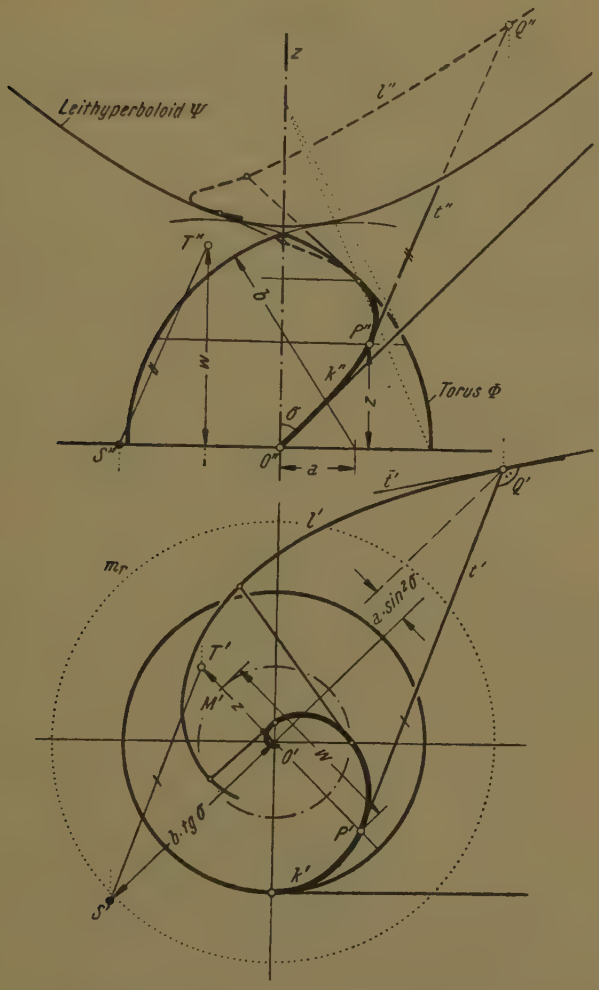

Abb. 2. Loxodrome des Spindeltorus in Grund- und Aufriß ($a = 1, b = 3, \sigma = 45^0$)

dies für ihr Element Q gilt. Durch wiederholte Anwendung solcher Operationen läßt sich eine unendliche Punktfolge gewinnen, die durch entsprechende Abwandlung der Vorschrift noch beliebig verdichtet werden kann: So wie es möglich ist, aus P und R den „Halbierungspunkt" Q zu rekonstruieren, kann jedes Bogenstück sukzessive unterteilt werden. Alle diese Konstruktionen sind mit

Lineal und Zirkel ausführbar. Hingegen ist die Bestimmung des zur Loxodrome PQ gehörigen Schnittwinkels σ eine transzendente Aufgabe und hier nicht ohne Rechnung zu bewältigen; gleiches gilt für die umgekehrte Aufgabe, zu vorgeschriebenem Schnittwinkel σ zwei Loxodromenpunkte anzugeben.

2. Grenzfälle.

Für $a \to 0$ strebt der Spindeltorus gegen eine *Kugel* vom Radius b, und aus (1.6) wird die Darstellung der bekannten *Kugelloxodrome*

$$\mathfrak{x} = \frac{b}{\operatorname{ch} p\varphi} \begin{cases} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \operatorname{sh} p\varphi \end{cases} \quad \text{mit } p = \operatorname{ctg}\sigma. \tag{2.1}$$

Für $a \to b$ oder $b \to a$ stellt sich hingegen der „parabolische" Grenzfall des Torus ein, der durch *zusammengerückte Knotenpunkte*

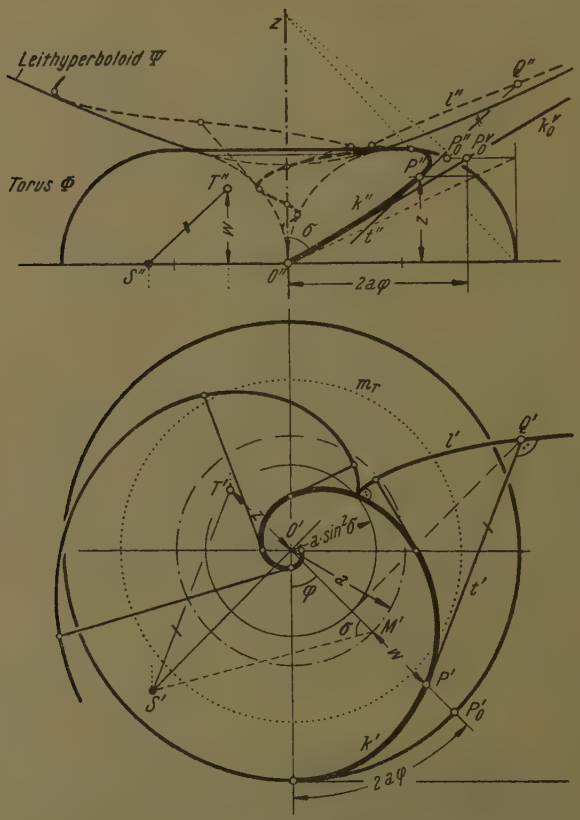

Abb. 3. Zur gewöhnlichen Schraublinie inverse Torusloxodrome ($a=b$, $\sigma=60^0$).

$I = J = O$ gekennzeichnet ist. Mit c strebt auch p gegen Null, so zwar, daß zufolge (1.3) $\lim bp/c = \operatorname{ctg}\sigma = q$. Die Darstellung der *Torusloxodrome* nimmt dabei die folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{x} = \frac{2a}{1+q^2\varphi^2}\begin{cases}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ q\varphi\end{cases} \tag{2.2}$$

Der vorliegende Torustyp wird durch Inversion vom (biplanaren) Zentralknoten O aus in einen *Drehzylinder* verwandelt, wobei seine Loxodromen in gewöhnliche *Schraublinien* übergehen. Die Darstellung (2.2) kann daher auch unmittelbar aus der Schraubliniengleichung $\mathfrak{x}_0 = 2a\,.\,(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ q\varphi)$ durch Anwendung der Inversion $\mathfrak{x} = 4a^2\mathfrak{x}_0/\mathfrak{x}_0^2$ abgeleitet werden. Auch konstruktiv läßt sich dieser Übergang mit Vorteil ausnützen (Abb. 3). — Der *Zentralriß* der Torusloxodrome aus dem Zentrum O auf irgend eine Bildfläche stimmt mit dem Zentralriß der inversen Schraublinie überein; insbesondere ist der Zentralriß auf eine achsennormale Ebene, etwa $z = qa$, eine *hyperbolische Spirale* $r = a/\varphi$.

3. Die Loxodromen des Ringtorus.

Unter der Voraussetzung $a > b$ werden die Knotenpunkte des Torus konjugiert-imaginär und dieser hat die Gestalt eines *Ringes*. Die Konstanten c und p wären rein imaginär; wird jetzt in Abänderung von (1.1)

$$c^2 = a^2 - b^2 \tag{3.1}$$

gesetzt und p wiederum durch

$$p = \frac{c}{b}\operatorname{ctg}\sigma \tag{3.2}$$

definiert, dann nimmt die Darstellung der *Torusloxodrome* mit Rücksicht auf $\operatorname{ch} iu = \cos u$ und $\operatorname{sh} iu = i\sin u$ folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{x} = \frac{c}{a - b\cos p\varphi}\begin{cases}c\cos\varphi\\ c\sin\varphi\\ b\sin p\varphi\end{cases} \tag{3.3}$$

Zu $p = 1$ gehört wegen $y : z = c : b$ eine *ebene Loxodrome*, und zwar ein Kegelschnitt, wie aus der Grundrißprojektion $r\,(a - b\cos\varphi) = c^2$

zu ersehen ist; es handelt sich offensichtlich um einen der *Villarceauschen Kreise*, die von den doppelt berührenden Ebenen der Ringfläche ausgeschnitten werden[7]. Eine zweite Schar von Loxodromenkreisen gehört natürlich zur Annahme $p = -1$. Alle berühren das durch die Achse legbare Minimalebenenpaar.

Die Ringloxodromen sollen für $|p| > 1$ „*steilgängig*", für $|p| < 1$ „*flachgängig*" genannt werden.

Setzt man in der Loxodromengleichung (3.3) $p\varphi = \psi$, also $\varphi = \psi/p$, so unterscheidet sie sich von der Gleichung des *Villarceau*schen Kreises nur dadurch, daß der Polarwinkel mit dem konstanten Faktor $1/p$ multipliziert erscheint: Hierin steckt die Bemerkung von *E. Müller*[2], wonach die zum Parameterwert p gehörige steil-, bzw. flachgängige Loxodrome aus dem Loxodromenkreis $p = 1$ durch $1/p$-fache *achsiale Winkelstauchung*, bzw. *-streckung* gewonnen werden kann; Achsenabstand r und Höhenkote z bleiben bei dieser Punkttransformation unverändert.

Nach dem Gesagten ist der *Loxodromengrundriß*, dessen Polargleichung $r(a - b\cos p\varphi) = c^2$ lautet, eine um ihren Brennpunkt winkelgestauchte, bzw. -gestreckte Ellipse; für ganzzahliges p hat die Kurve den Namen „*Kurve mit p Bäuchen*" erhalten[8]. Eine ähnliche Aussage gilt übrigens allgemeiner für jede *Zentralprojektion* aus einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Ebene, denn der Zentralriß eines Loxodromenkreises ist stets ein *Kegelschnitt*, der einen Brennpunkt auf der Achse hat: Der Zentralriß der Loxodrome geht aber aus dem genannten Kegelschnitt durch $1/p$-fache Winkelzerrung hervor. Eine Sonderstellung kommt hierbei noch dem Zentralriß aus der Torusmitte O zu, weil sich der Loxodromenkreis dabei als *Gerade* projiziert: Der Zentralriß der Loxodrome ist mithin eine „winkelgestreckte Gerade", also eine *Ährenkurve*[9], beschrieben etwa durch $r \sin p\varphi = c$, $z = b$.

Wird die Zentralprojektion aus der Torusmitte hingegen auf einen koachsialen *Drehzylinder* entworfen, etwa auf den Zylinder $r = c$, so ergibt sich eine durch $z = b \sin p\varphi$ gekennzeichnete Bildkurve; das ist eine *winkelgezerrte Ellipse*, die bei Verebnung des Zylindermantels in eine

---

[7] *Y. Villarceau*: Note concernant un troisième système de sections circulaires qu'admet le tore circulaire ordinaire. C. R. 27, 246 (1848). — Die Loxodromeneigenschaft dieser Kreise folgt einfach aus der Existenz der winkeltreuen Automorphien des Torus, die ja auch kreistreu sind.

[8] *G. Loria*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Teubner 1910), Bd. I, 423. — Vgl. die Abbildungen bei *K. Strubecker*, a. a. O. [4].

[9] *G. Loria*, a. a. O., Bd. I, 367, Bd. II, 108. — Vgl. auch *J. Haag*, a. a. O. [5].

Sinuslinie übergeht (Abb. 4). Von dieser Art sind die Punktbahnen eines starren Systems, das gleichförmig um eine Achse rotiert und gleichzeitig eine harmonische Schwingung längs dieser Achse vollführt[10]. Allgemeiner stellen sich analoge Bildkurven auch bei beliebiger Lage des Projektionszentrums auf der Torusachse ein, weil auch dann noch die Zylinderprojektion eines Loxodromenkreises in zwei Ellipsen zerfällt.

Satz 1. *Zentralprojektion der Ringflächenloxodromen aus einem Achsenpunkt auf einen koachsialen Drehzylinder liefert Bildkurven, die bei Verebnung des Zylindermantels zu Sinuslinien werden.*

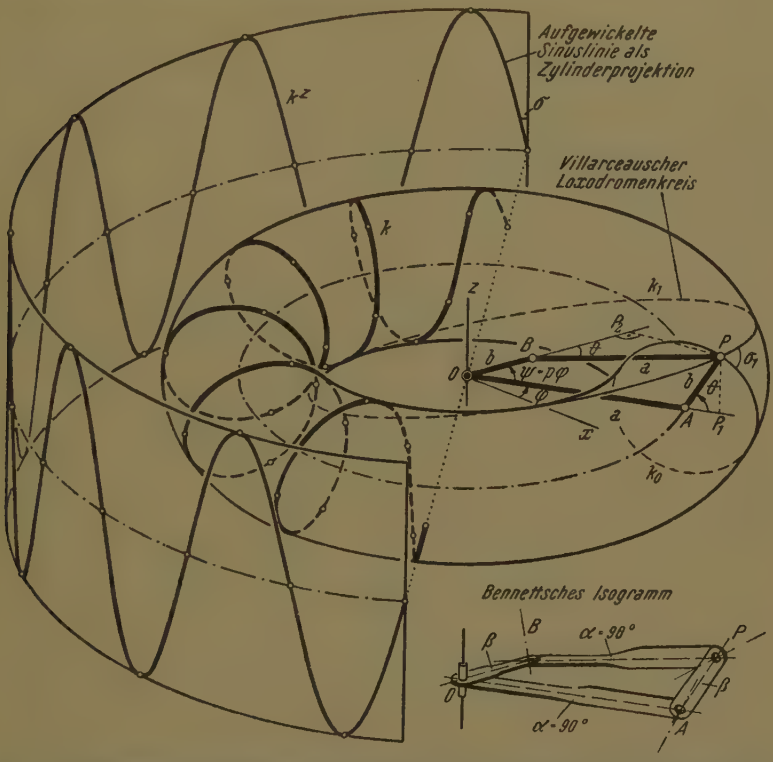

Abb. 4. Steilgängige Ringflächenloxodrome samt zentraler Zylinderprojektion in normalachsonometrischer Darstellung ($a = 3$, $b = 1$, $p = 12$).

Mit dieser „Zylinderprojektion" eröffnet sich ein neuer, recht bequemer und besonders anschaulicher Zugang zur darstellend-geometri-

[10] Diese bemerkenswerte Bewegung, die eine naheliegende Verallgemeinerung des *„aufrechten Darbouxschen Umschwungs"* ($p = 1$) mit lauter elliptischen

schen Behandlung der Ringloxodromen (Abb. 4).

Während die Ringloxodromen für irrationales p aus unendlich vielen kongruenten, periodisch aneinandergereihten Bögen bestehen und transzendent sind, fallen sie für rationales p geschlossen und *algebraisch* aus. Wird in diesem Fall $p = \mu/\nu$ als gekürzter Bruch angeschrieben (der positiv vorausgesetzt werden kann, da Vorzeichenwechsel bei p nur eine Spiegelung der Loxodrome bewirkt), und $\exp(i\varphi/\nu) = t$ als neuer Kurvenparameter eingeführt, dann treten in (3.3) nur die Potenzen t^{μ}, $t^{-\mu}$, t^{ν}, $t^{-\nu}$ und t^0 auf: Es liegt also eine *rationale Kurve* vor, deren *Ordnung* den Wert

$$N = 2 \max(\mu, \nu) \tag{3.4}$$

hat[11]. — Für eine feinere Charakterisierung muß die eingeführte Unterscheidung steil- und flachgängiger Typen herangezogen werden:

$|p| > 1$ ($\mu > \nu$, steilgängige Loxodrome). Ordnung $N = 2\mu$. Die Knotenpunkte I und J sind $(\mu - \nu)$-fache Punkte der Kurve $(t = 0, \infty)$, welche jeden Parallelkreis in μ und jeden Meridiankreis in ν veränderlichen Punkten trifft.

$|p| < 1$ ($\mu < \nu$, flachgängige Loxodrome). Ordnung $N = 2\nu$. Die absoluten Punkte der achsennormalen Stellung sind $(\nu - \mu)$-fache Punkte der Kurve $(t = 0, \infty)$, welche jeden Meridiankreis in ν und jeden Parallelkreis in μ veränderlichen Punkten trifft.

Man beachte, daß eine Inversion, die einen Torus unter Vertauschung der Meridian- und Parallelkreise umstülpt, steilgängige Loxodromen in flachgängige überführt und umgekehrt, wobei der Betrag des Parameters p den reziproken Wert annimmt.

4. Kinematische Erzeugung der Ringloxodromen.

Zunächst müssen einige Erklärungen über einen merkwürdigen Mechanismus, das sogenannte *Bennettsche Isogramm*, vorausgeschickt werden. Es handelt sich um ein windschiefes Viereck $OAPB$ mit gleich langen Gegenseiten $OA = BP = a$, $OB = AP = b$. Man kann sich

---

Bahnkurven darstellt, wird derzeit von Herrn *W. Kautny* in einer Dissertationsarbeit näher untersucht.

Daß die auf einen Drehzylinder aufgewickelten Sinuslinien für $|p| < 1$ kollinear sind zu den *geodätischen Linien eines Drehkegels*, erwähnte der Verfasser in seiner Abhandlung „Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen", Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, **158**, 75—105 (1950).

[11] Die Ordnungsformel, die *A. Puchta*, a. a. O.[1] mitteilt, ist falsch; deshalb entgingen dem Verfasser wohl auch die Loxodromenkreise.

ein solches „*windschiefes Parallelogramm*" aus einem gewöhnlichen entstanden denken, das längs einer Diagonale geknickt wurde; damit wird die vorhandene *Achsensymmetrie* bezüglich des Gemeinlotes der Diagonalen AB und OP unmittelbar klar. Gegenüberliegende Eckenwinkel sind danach jeweils gleich:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BPA = \psi, \quad \sphericalangle PAO = \sphericalangle OBP = \pi - \theta$$

Die von je zwei Nachbarseiten aufgespannten Ebenen sollen „*Knotenebenen*" heißen; der (vorzeichenbegabte) Winkel der beiden Knotenebenen, die eine bestimmte Seite enthalten, sei „*Schränkwinkel*" genannt. Aus den erwähnten Symmetriegründen gehört zu je zwei Gegenseiten derselbe Schränkwinkel; er sei für a mit α, für b mit β bezeichnet. Man denke sich die Viereckseiten als starre, um die Winkel α bzw. β *verwundene Lamellen* ausgebildet, welche an den Enden durch Zylindergelenke miteinander verbunden sind, deren Achsen zu den Knotenebenen normal sind (vgl. die Nebenfigur in Abb. 4). Daß ein solches Gelenkviereck wirklich *beweglich* ist, geht auf eine Entdeckung von *G. T. Bennett* zurück[12]. Beachtet man nämlich, daß die aus P auf OA und OB gefällten Lote PP_1 und PP_2 gegen die Knotenebene OAB unter den Winkeln α und β geneigt sind, und drückt man dementsprechend die Höhe von P über OAB auf zwei Arten durch

$$b \sin\theta \,.\, \sin\alpha = -a \sin\theta \,.\, \sin\beta$$

aus, so ergibt sich die Beziehung

$$\sin\alpha : \sin\beta = -a : b. \tag{4.1}$$

Hieraus folgt aber: Wird das Viereck $OAPB$ unter Erhaltung der Seitenlängen a, b und des Schränkwinkels α verändert — was zweifellos möglich ist — so bleibt auch β konstant. Das Isogramm ist also *zwangläufig beweglich*.

Mit Hilfe eines *speziellen Isogramms* $OAPB$ mit den Schränkwinkeln

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = -\arcsin\frac{b}{a} \tag{4.2}$$

läßt sich nun eine elementare und äußerst anschauliche Einsicht in das Wesen der Loxodromenkreise der Ringfläche gewinnen[13]. Wird nämlich die Knotenebene von O samt der zugehörigen Gelenkachse z festgehalten,

[12] *G. T. Bennett*: A new mechanism. Engineering **76**, 777—778 (1903). — The skew isogram mechanism. Proc. London Math. Soc. **13**, 151—173 (1914).

[13] Einen Versuch in dieser Richtung, der jedoch noch nicht die äußerste Einfachheit aufweist, unternahm bereits *R. Bricard*: Démonstrations élémentaires de propriétés fondamentales du tore. Nouv. Ann. Math. **82**, 308—313 (1924).

so bildet das Isogramm einen *Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden*, weil sich die Arme OA und OB noch unabhängig voneinander drehen können. Die *Bahnfläche* Φ des Punktes P ist dabei offensichtlich eine Drehfläche mit der Achse z, und zwar ein *Torus*, da P bei festgehaltenem Arm OA einen *Kreis* k_0 um A durchläuft, dessen Ebene durch z geht (Abb. 4). Wird hingegen der Arm OB in irgendeiner Stellung festgehalten, so beschreibt P einen andersartigen Kreis k_1 auf Φ, der in der schräg-liegenden Knotenebene von B verläuft, und diese Ebene ist auf Grund von (4.2) eine den Torus doppelt berührende: Damit ist die Existenz der *Villarceauschen Kreise* überraschend einfach festgestellt. — Auch deren *Loxodromeneigenschaft* ist höchst einfach einzusehen: Die Tangenten von k_0 und k_1 in P sind gegen die Knotenebene PAB unter den Schränkwinkeln β bzw. $\alpha = \pi/2$ geneigt, bilden also miteinander den konstanten Winkel $|\sigma_1| = \frac{1}{2}\pi - |\beta|$.

Dreht sich bei festgehaltenem Arm OB der Arm OA mit konstanter Geschwindigkeit, so wird der Loxodromenkreis k_1 mit konstanter achsialer Winkelgeschwindigkeit (bezüglich der z-Achse) durchlaufen; wird nun das ganze Isogramm noch einer zusätzlichen gleichförmigen Drehung um z unterworfen, so beschreibt P eine Bahnkurve k auf Φ, die aus k_1 durch eine *Müller*sche Winkelstreckung (oder -stauchung) hervorgeht, also eine *Torusloxodrome*. Wir haben damit den bemerkenswerten

Satz 2. *Werden bei einem Isogramm, dessen längeres Seitenpaar rechte Schränkwinkel aufweist, zwei Nachbararme mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten um ihre gemeinsame, festgehaltene Gelenksachse angetrieben, so durchläuft der diesem Gelenk gegenüberliegende Knotenpunkt eine Ringflächenloxodrome.*

Es liegt nahe, die auf analoge Weise von einem *allgemeinen* Isogramm erzeugten Bahnkurven zu betrachten, ferner die dabei herrschenden kinematischen Verhältnisse (Achsenflächen usw.) näher zu untersuchen; dies mag gelegentlich an anderer Stelle geschehen[14].

Zur analytischen Darstellung der nach Satz 2 erzeugten Ringloxodrome wird noch der Zusammenhang zwischen den Isogramm-

[14] Hier sei vielleicht auf die bekannten *ebenen* Grenzfälle hingewiesen: Rotieren zwei Nachbarseiten eines *Parallelogramms*, bzw. *Antiparallelogramms* mit proportionalen Geschwindigkeiten um ihren gemeinsamen, festen Eckpunkt, so durchläuft die Gegenecke eine *Radlinie* (*G. Bellermann*, Epizykloiden und Hypozykloiden; Diss. Jena 1867), bzw. die *Inverse* einer solchen (*F. Morley*, On adjustable cycloidal and trochoidal curves; Amer. J. Math. 16/1894).

winkeln ψ und θ benötigt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OP_1P_2 (Abb. 4) ist abzulesen

$$\cos\psi = \frac{a\cos\theta + b}{a + b\cos\theta}, \quad \cos\theta = \frac{a\cos\psi - b}{a - b\cos\psi}. \tag{4.3}$$

Bezeichnet dann φ den von einer Durchschlagstellung des Isogramms aus gezählten Polarwinkel von OA und wird gemäß Satz 2

$$\psi = p\varphi \tag{4.4}$$

gesetzt, dann ergibt sich mit Benützung von (4.3) für die Zylinderkoordinaten r und z von P:

$$\begin{aligned} r &= a + b\cos\theta = \frac{c^2}{a - b\cos p\varphi} \qquad \text{mit } c^2 = a^2 - b^2 \\ z &= b\sin\theta \quad\; = \frac{bc\sin p\varphi}{a - b\cos p\varphi}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

in grundsätzlicher Übereinstimmung mit (3.3). Der Schnittwinkel σ ergibt sich gemäß (3.2) aus $\operatorname{ctg}\sigma = pb/c$.

Sieht man die Winkel φ und ψ als voneinander unabhängige Veränderliche an, so eignen sie sich für den vorliegenden Fragenkreis bestens als Flächenkoordinaten auf dem Ringtorus — viel besser jedenfalls als die üblichen Größen φ und θ. Die zugehörige Darstellung lautet

$$\mathfrak{x} = \frac{c}{a - b\cos\psi} \begin{cases} c\cos\varphi \\ c\sin\varphi \\ b\sin\psi \end{cases} \qquad \text{mit } c^2 = a^2 - b^2 \tag{4.6}$$

Man überzeugt sich an Hand von Abb. 5 leicht, daß der den Parallelkreis festlegende Koordinatenwinkel ψ als Schnittwinkel der den Parallelkreis enthaltenden Orthogonalkugel des Torus mit der Mittelebene $z = 0$ gedeutet werden kann. Sämtliche Orthogonalkugeln bilden bekanntlich ein Büschel mit dem Grundkreis

$$x^2 + y^2 = c^2,\ z = 0.$$

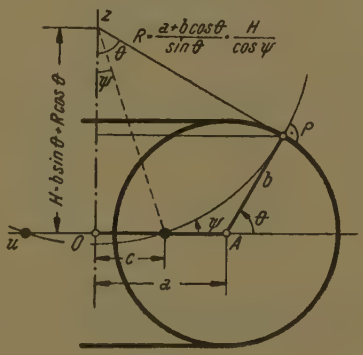

Abb. 5.

Werden diese Flächenparameter φ, ψ — oder dazu proportionale Größen ξ, η — als kartesische Koordinaten in einer Bildebene angesehen, so ergibt sich damit eine (doppeltperiodische) *Abbildung der*

Ringfläche auf eine Ebene, bei der sämtliche *Loxodromen* in *Gerade* übergehen. Sorgt man insbesondere dafür, daß die durch $\operatorname{ctg}\sigma = \pm i$, also $p = \pm ic/b$, gekennzeichneten *Minimalloxodromen* $\psi = p\varphi + \text{const}$ in *Minimalgeraden* $\eta = \pm i\xi + \text{const}$ übergeführt werden, was etwa durch

$$\xi = c\varphi,\ \eta = b\psi \tag{4.7}$$

bewerkstelligt wird, so liegt eine *konforme Abbildung* vor. Diese vielgenannte Abbildung wird durch die obenangeführte geometrische Interpretation der Koordinaten φ und ψ hiemit einer einfachen konstruktiven Behandlung zugänglich gemacht.

5. Tangentenleitflächen.

Faßt man alle ∞^1 zu einem bestimmten (vorzeichenbegabten) Schnittwinkel σ gehörigen Loxodromen eines Torus Φ, die offensichtlich eine Drehschar erfüllen, ins Auge, so erhält man in der Gesamtheit der ∞^2 zugehörigen Loxodromentangenten eine *rotationssymmetrische Strahlkongruenz* $\mathfrak{L}$. Diese Kongruenz kann in ∞^1 kongruente Regelscharen 2. Grades zerlegt werden, die sich durch Zusammenfassung der Loxodromentangenten längs der Meridiankreise des Torus ergeben und deren Trägerflächen *einschalige Drehhyperboloide* Λ vom Öffnungswinkel $\pi - 2\,|\,\sigma\,|$ sind; dieselben berühren den Torus längs des betreffenden Meridiankreises, der gleichzeitig ihren Kehlkreis abgibt. Als Prototyp mag das zum Meridian $\varphi = 0$ gehörige Hyperboloid

$$\Lambda \equiv (x-a)^2 + z^2 - y^2 \operatorname{ctg}^2\sigma - b^2 = 0 \tag{5.1}$$

gelten. Das *Brennflächenpaar* der Kongruenz $\mathfrak{L}$ kann dann als Hüllgebilde der um die Torusachse z rotierenden Fläche Λ gefunden werden. Die *Charakteristik* von Λ ist gekennzeichnet durch Flächennormalen, die die Achse z treffen, also durch die Bedingung

$$\Lambda_x : \Lambda_y \equiv (x-a) : -y \operatorname{ctg}^2\sigma = x : y,$$

das ist ausgeführt

$$(x - a\sin^2\sigma)\, y = 0. \tag{5.2}$$

Die Charakteristik zerfällt mithin — wie vorauszusehen war — in den *Meridiankreis* $y = 0$ und eine *Hyperbel* in der Ebene $x = a\sin^2\sigma$, so daß neben dem *Torus* Φ als zweite Brennfläche von $\mathfrak{L}$ ein koachsiales *Drehhyperboloid* Ψ

$$(x^2 + y^2)\operatorname{ctg}^2\sigma - z^2 = a^2\cos^2\sigma - b^2 \tag{5.3}$$

auftritt. Dieses Hyperboloid ist für den Spindeltorus und seinen Grenzfall ($a \leqq b$) stets zweischalig, während es beim Ringtorus ($a > b$) einschalig oder zweischalig ausfällt, je nachdem ob steilgängige ($p^2 > 1$) oder flachgängige ($p^2 < 1$) Loxodromen vorliegen. — Die beiden Brennflächen Φ und Ψ berühren einander längs jener beiden Parallelkreise, die von dem gemeinsamen Punktepaar der beiden Bestandteile der Charakteristik von Λ herrühren; sie haben den gemeinsamen Radius $a \sin^2 \sigma$ und liegen in den Ebenen $z^2 = b^2 - a^2 \cos^4 \sigma$, brauchen daher beim Ringtorus nicht unbedingt reell zu sein.

Das festgestellte Brennhyperboloid Ψ wird von allen Tangenten — und mithin auch von allen Schmiegebenen — jeder σ-Loxodrome von Φ berührt; Ψ soll daher kurz als „*Leitfläche*" angesprochen werden. Zusammenfassend gilt

Satz 3. *Sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer Torusloxodrome berühren ein koachsiales Drehhyperboloid, das dem Torus längs zweier Parallelkreise angeschrieben ist.*

Die *Berührungskurve* l der Tangentenfläche der Ringloxodrome k (3.3) mit ihrem Leithyperboloid Ψ (5.3) wird beschrieben durch

$$\mathfrak{l} = \frac{\sin^2 \sigma}{p \sin p\varphi} \begin{cases} ap \sin p\varphi \cos \varphi - (a \cos p\varphi + b \,.\, \overline{p^2 - 1}) \sin \varphi \\ ap \sin p\varphi \sin \varphi + (a \cos p\varphi + b \,.\, \overline{p^2 - 1}) \cos \varphi \\ \qquad (a + b \,.\, \overline{p^2 - 1} \,.\, \cos p\varphi) \operatorname{ctg} \sigma \end{cases} \quad (5.4)$$

wobei $\operatorname{ctg} \sigma = bp/c$ und $c^2 = a^2 - b^2$.

Die *Konstruktion* dieser Kurve l wird durch die Abbildungen 2 und 3 zur Genüge illustriert: Man hat bloß jede einzelne Tangente t der Loxodrome k mit jener im Abstand $a \sin^2 \sigma$ parallel zur Achse verlaufenden Hilfsebene zu schneiden, die zur Meridianebene des betrachteten Loxodromenpunktes P normal ist. Da die Tangente $\bar{t}$ von l die reziproke Polare von t ist, erscheinen die Grundrißgeraden t' und $\bar{t}'$ konjugiert bezüglich des scheinbaren Umrisses (Kehlkreises) m von Ψ, also „orthogonal" im Sinne der auf m gegründeten *Cayley-Klein*schen Metrik: Die *Grundrißlinie* l' kann demnach als *nichteuklidische Evolvente des Loxodromengrundrisses* k' angesehen werden. — Allgemeiner erscheint die *Zentralprojektion* l^c der Berührungskurve aus irgend einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Ebene als Evolvente des (für die Ringfläche im Abschn. 3 gekennzeichneten) Loxodromenrisses k^c im Rahmen der durch den scheinbaren Umriß der Leitfläche Ψ definierten Bildebenenmetrik; diese ist im besonderen *euklidisch*, wenn als Projektionszentrum ein *Scheitel* von Ψ genommen wird (stereographische Projektion). — Die Berührungskurve l setzt auf der Loxodrome k mit *Spitzen* auf, was auf den erwähnten Berührungskreisen von Φ und Ψ geschieht (vgl. Abb. 3).

Ein Wort noch über die in den Abbildungen angewandte *Tangentenkonstruktion* der Torusloxodromen, der die Vorstellung des Hilfshyperboloides Λ und dessen Erzeugendenrichtkegels zu Grunde liegt: Man erhält die *Richtung* der zu einem Punkt P gehörigen Loxodromentangente t, wenn man P einer

Viertelschwenkung auf dem Meridiankreis unterwirft und den so (durch einfache Vertauschung der Horizontal- und Vertikalkoten $w = MP'$ und $z = P'P$) gewonnenen Punkt T mit jenem Punkt S der Meridiankreisachse verbindet, der von der Meridiankreismitte M den Abstand $MS = b \operatorname{tg} \sigma$ hat; es ist dabei bequem — wie dies in Abb. 2 u. 3 geschah — auf S und T noch die Parallelverschiebung um den Vektor MO auszuüben.

6. Nichteuklidische Deutungen.

1. Wird mit *K. Strubecker*[4] die die Knotenpunkte I, J enthaltende Kugel $\Omega\,(x^2 + y^2 + z^2 = b^2 - a^2 = \pm c^2)$ als *Grundkugel* des sogenannten *konformen Modells* eines *nichteuklidischen Raumes* aufgefaßt, dessen „Geraden" und „Ebenen" in bekannter Weise durch die Orthogonalkreise, bzw. -kugeln von Ω dargestellt werden und dessen Winkelmetrik mit der gewöhnlichen übereinstimmt, dann kann der *Torus* Φ als *Abstandsfläche* der Achse z und in diesem Sinne als (*Clifford*scher) „*Drehzylinder*" angesprochen werden. Die Metrik ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ ist; Ω ist dementsprechend eine reelle, singuläre, bzw. nullteilige Kugel[15]. Die Inversionen an den Orthogonalkugeln von Ω — einschließlich der Spiegelungen an den Durchmesserebenen von Ω — sind als nichteuklidische „*Spiegelungen*" anzusehen, während jede aus zwei solchen „Spiegelungen" zusammengesetzte gleichsinnig-konforme Automorphie von Ω als „*Drehung*" zu bezeichnen ist, deren „Achse" die punktweise festbleibende Schnittlinie der beiden Spiegelebenen ist. Die Abstandsfläche Φ verträgt naturgemäß zwei Arten von Drehungen: Solche um die Achse z (die mit den euklidischen Drehungen um z übereinstimmen), und solche um die Achse des Büschels der „Normalebenen" von z, repräsentiert durch den Kreis $u\,(x^2 + y^2 = a^2 - b^2 = \mp c^2,\ z = 0)$. Die aus zwei Drehungen verschiedener Art zusammengesetzte Transformation kann dann als „*Schraubung*" um das Achsenpaar z, u bezeichnet werden, wenngleich man diesen Namen besser der durch Iteration und infinitesimale Verdichtung daraus hervorgehenden eingliedrigen kontinuierlichen *Gruppe* vorbehalten wird, wie dies auch im Euklidischen üblich ist. Die „*Schraublinien*", also die Bahnkurven einer solchen Gruppe im Sinne von *S. Lie*, verlaufen nach allem auf den ∞^1 Abstandsflächen Φ von z (und u) und durchsetzen das invariante Meridiansystem

[15] Eine eingehende konstruktive Behandlung dieser Raummodelle entwickelte *E. Kruppa*: Darstellende Geometrie im Kugelgebüsch. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien **140**, 369—397 (1931).

einer solchen Fläche unter *konstantem Schnittwinkel*, sind also identisch mit den *Torusloxodromen*.

Satz 4. *Im Rahmen der bekannten konformen Modelle nichteuklidischer Räume können die Loxodromen des Spindel-, bzw. Ringtorus als hyperbolische, bzw. elliptische Schraublinien aufgefaßt werden, wenn als absolutes Gebilde die konzentrische, die Torusknoten enthaltende Kugel gewählt wird.*

Der in Abschnitt 1, bzw. 3 eingeführte „Parameterwert" p spielt jetzt die Rolle des *Schraubparameters*: Er stellt den konstanten Quotienten zwischen der Schiebstrecke längs der Schraubachse z (= Drehwinkel ψ um u im elliptischen Fall) und dem Drehwinkel φ um z dar. — Die im elliptischen Fall zu $p = \pm 1$ gehörigen *Loxodromenkreise* sind übrigens Orthogonalkreise von Ω, also im Sinne der Modellgeometrie als *Gerade* anzusehen; diese (bei *K. Strubecker* im Vordergrunde stehenden) speziellen Schraubungen sind als *Cliffordsche Schiebungen* anzusprechen.

2. Wird, im Gegensatz zur ersten Auffassung, die Kugel Ω^* $(x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 = \mp c^2)$ zur Grundkugel eines konformen nichteuklidischen Raummodells erklärt, dann hat der Torus Φ „gerade" Meridiane und kann demnach als *„Drehkegel"* mit der Achse z angesprochen werden[15]. Hierfür könnte übrigens an Stelle von Ω^* jede andere Orthogonalkugel von Φ treten. Jedenfalls gilt

Satz 5. *Die Loxodromen des Spindel- und Ringtorus können im Rahmen konformer Raummodelle als nichteuklidische Drehkegelloxodromen angesehen werden, wenn als absolutes Gebilde irgend eine Orthogonalkugel des Torus gewählt wird.*

3. Mittels der wohlbekannten einzweideutigen *„Darbouxschen Transformation"*, die jedem bezüglich Ω inversen Punktepaar den Pol seiner Symmetrieebene zuordnet, kann der Übergang vom konformen zum *projektiven Modell* eines nichteuklidischen Raumes im Sinne von *A. Cayley* und *F. Klein* vollzogen werden. Hier haben jetzt die Geraden und Ebenen wieder ihr gewohntes Aussehen, und die Metrik wird durch gewisse Doppelverhältnisbeziehungen gegenüber der „absoluten" Maßfläche Ω erklärt; als kongruente Transformationen gelten nunmehr die automorphen Kollineationen von Ω. Die *Torusloxodromen* in ihrer Deutung gemäß Satz 4 werden nun durch die *Darboux*sche Transformation in die von *K. Strubecker* und später auch vom Verfasser untersuchten *nichteuklidischen Schraublinien projektiven Charakters* über-

geführt, die sich als spezielle *W-Kurven* und *Gewindekurven* auf Flächen 2. Grades erweisen[16].

4. Werden die Torusloxodromen hingegen in ihrer Deutung nach Satz 5 der Darbouxtransformation unterworfen, so gelangt man zu *nichteuklidischen Drehkegelloxodromen* im Rahmen des *Cayley-Klein*schen Raummodells. Diese bisher anscheinend noch nicht beachteten Kurven sind durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre Tangenten jeweils eine *konzyklische Drehfläche 2. Ordnung* berühren. Um dies einzusehen, bedenke man, daß die zu einem bestimmten Schnittwinkel σ gehörigen Loxodromentangenten in den Punkten einer Kegelerzeugenden einen in der Tangentialebene liegenden „Kreis" einhüllen, durch dessen Rotation um die Kegelachse die genannte *Tangentenleitfläche* entsteht[17].

Die speziell aus den Loxodromen der Ringfläche hervorgehenden hyperbolischen Loxodromen von Drehkegeln mit uneigentlicher Spitze präsentieren sich in der hier auftretenden Form als *achsial-winkelgezerrte Kegelschnitte* auf einem euklidischen Drehkegel, im besonderen als die in Satz 1 genannten, auf einen Drehzylinder aufgewickelten Sinuslinien, da es sich ja um Zentralprojektionen der Torusloxodromen aus Achsenpunkten auf koachsiale Drehkegel oder -zylinder handelt. Die zu $p = \pm 1$ gehörigen *Loxodromenkreise* eines nichteuklidischen Drehkegels verdienen besondere Beachtung.

7. Die Torusloxodromen als D-Linien.

Jene ∞^2 auf einer gegebenen Fläche verlaufenden Kurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren, werden „*D-Linien*" genannt, nach *G. Darboux*, der sie als erster betrachtete[18]. Auf Grund der Definition handelt es sich hierbei offenbar um einen der konformen Geometrie eigenen Begriff: Die D-Linien inverser Flächen entsprechen einander.

Daß die D-Linien eines euklidischen *Drehzylinders* durch seine *Loxodromen*, also die auf ihm verlaufenden *Schraublinien* dargestellt werden, ist bekannt und liegt an deren achsialer Symmetrie bezüglich

[16] *K. Strubecker*: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien **139**, 421—450 (1930). — Über nichteuklidische Schraubungen. Mh. Math. Phys. **38**, 63—84 (1931). — *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Mh. Math. Phys. **44**, 249—279 (1936).

[17] Auf derartige Drehkegelkurven, deren Tangentenleitflächen aber speziell koachsiale *Kugeln* sind, stieß der Verfasser bei den *pseudogeodätischen Linien des Drehkegels*; vgl. die in Fußnote 10 genannte Abhandlung.

[18] *G. Darboux*: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. **73**, 732—736 (1871).

der Hauptnormalen. Dieser Sachverhalt gilt mit analoger Begründung auch noch in nichteuklidischer Erweiterung: *Jede nichteuklidische Schraublinie ist D-Kurve des sie tragenden Cliffordschen Drehzylinders.* Da im Rahmen eines konformen Raummodells die nichteuklidischen Kugeln durch euklidische Kugeln repräsentiert werden, folgt aus Satz 4 der

Satz 6. *Die Loxodromen des Torus sind mit seinen D-Linien identisch.*

Für diese vom Verfasser auf dem angedeuteten Weg schon früher festgestellte Tatsache[19] soll hier noch ein direkter Beweis kurz auseinandergesetzt werden: Die beiden durch einen Toruspunkt P gehenden Loxodromen k und $\bar{k}$ mit den Schnittwinkeln $+\sigma$ und $-\sigma$ werden sowohl durch die Spiegelung an der Meridianebene von P als auch durch die Inversion an der P enthaltenden Orthogonalkugel des Torus vertauscht; hierbei werden natürlich auch die Schmiegkugeln Σ und $\bar{\Sigma}$ in P miteinander vertauscht, was nur möglich ist, wenn sie zusammenfallen. Die gemeinsame Schmiegkugel $\Sigma = \bar{\Sigma}$ von k und $\bar{k}$ wird dann aber den Torus in P berühren, was zu beweisen war. — Auf gleiche Weise lassen sich natürlich auch die Loxodromen des *Drehkegels* mit seinen D-Kurven identifizieren.

Die Frage nach dem *Ort der Schmiegkugelzentren* einer Torusloxodrome k, also ihrer *Planevolute*, ist *im nichteuklidischen Sinne* gemäß Abschn. 6, 1 leicht zu beantworten: Die Schmiegkugeln der „Schraublinie" k gehen durch Schraubung auseinander hervor, daher erfüllen ihre nichteuklidischen Mittelpunkte selbst eine *Schraublinie*, d. i. ein Loxodromenpaar auf einem Torus, der mit der Trägerfläche von k gemeinsame Knotenpunkte hat. Unter dem nichteuklidischen „Mittelpunkt" einer Kugel Σ ist dabei bekanntlich das allen „Normalen" gemeinsame, also bezüglich Σ und der Grundkugel Ω inverse Punktepaar zu verstehen; es liegt auf dem gemeinsamen Durchmesser von Σ und Ω und gibt die Mitten der im Büschel $\Sigma\Omega$ enthaltenen Nullkugeln ab.

Um Aussagen über die *euklidische Planevolute* k^* zu gewinnen — die nach dem Gesagten jedenfalls dieselbe Zentralprojektion aus der Torusmitte O liefert, wie die nichteuklidische — beachte man zunächst, daß die Schmiegkugeln Σ der Loxodrome k neben dem Trägertorus Φ noch einen zweiten Torus $\bar{\Phi}$ mit denselben Knotenpunkten I und J berühren. Dies geht unmittelbar aus der Vorstellung der nichteukli-

[19] *W. Wunderlich*: Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken. Ann. di mat. **33**, 145—164 (1952).

dischen Schraubung hervor, kann aber auch durch Zurückgehen auf die Spiralung mittels der in Abschn. 1 verwendeten Inversion $\mathfrak{J}$ gefolgert werden (vgl. Abb. 1). Aus der Tatsache, daß die Kugeln Σ zwei koachsiale Tori Φ und $\bar{\Phi}$ berühren, folgt dann weiter, daß ihre Mittelpunkte auf einer gewissen, durch Rotation eines *Kegelschnittes* erzeugten *Drehfläche 4. Ordnung* Φ^* liegen, die die Mittenkreise von Φ und $\bar{\Phi}$ zu Fokalkurven hat und gleichfalls in I und J Knoten aufweist. Sammelt man ferner die Normalebenen der Loxodromenelemente längs der Meridiankreise, so hüllen sie ∞^1 Drehkegel mit der Öffnung 2σ ein, die ihrerseits ein einschaliges Drehhyperboloid Ψ^* vom Öffnungswinkel $\pi - 2\sigma$ einhüllen, das den Mittenkreis von Φ zur Fokalkurve hat, also durch

$$\frac{x^2 + y^2}{\cos^2\sigma} - \frac{z^2}{\sin^2\sigma} = a^2 \tag{7.1}$$

beschrieben wird. Dieses Hyperboloid wird von allen Normalebenen und mithin auch von den Krümmungsachsen der σ-Loxodrome k berührt, stellt also eine *Tangentenleitfläche der Planevolute* k^* dar.

Nach allem bestehen somit zwischen den Torusloxodromen und ihren Planevoluten weitgehende Analogien. Dies geht auch aus der Parameterdarstellung hervor, die hier nur für den Fall des Ringtorus wiedergegeben werden soll. Ausgehend von der Loxodromengleichung (3.3) bestimmt man durch Ableitung nach φ zunächst einen Tangentenvektor und damit die Gleichung der Normalebene ν

$$\begin{aligned} cx\ &[(a - b\cos p\varphi)\sin\varphi + bp\sin p\varphi\cos\varphi] \\ -\,cy\ &[(a - b\cos p\varphi)\cos\varphi - bp\sin p\varphi\sin\varphi] \\ +\,bpz\ &(b - a\cos p\varphi) \;=\; abcp\sin p\varphi. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Zweimalige Differentiation dieser Gleichung nach φ führt auf zwei weitere Ebenen $\dot{\nu}$ und $\ddot{\nu}$, die im Schnitt mit ν das zum Punkt $P(\varphi)$ gehörige *Schmiegkugelzentrum* P^* liefern; auf Grund von Satz 6 genügt es aber auch, $\dot{\nu}$ mit der Torusnormale in P zu schneiden. Nach längerer Rechnung stellt sich schließlich ein recht einfaches Resultat ein: Die Darstellung der *Planevolute* k^* lautet:

$$\mathfrak{x}^* = \frac{a}{b\,(p^2 - 1) + a\cos p\varphi} \begin{Bmatrix} bp^2\cos\varphi \\ bp^2\sin\varphi \\ -\,c\sin p\varphi \end{Bmatrix} \tag{7.3}$$

Der *Schmiegkugelradius* hat den Wert

$$R = \frac{b^2 p^2 + c^2}{b(p^2 - 1) + a \cos p\varphi}. \tag{7.4}$$

Diese Formel gestattet eine einfache Überprüfung, wenn man beachtet, daß die Schmiegkugel einer D-Linie mit der *Meusnierkugel* des betreffenden Linienelementes identisch sein muß.

Der Vergleich der Formeln (7.3) und (7.4) zeigt, daß zwischen dem Schmiegkugelradius R und dem Achsenabstand r^* der Schmiegkugelmitte Proportionalität herrscht. Der *Proportionalitätsfaktor*

$$\varepsilon = \frac{R}{r^*} = \frac{b^2 p^2 + c^2}{abp^2} = \frac{b}{a \cos^2 \sigma} \tag{7.5}$$

gibt offenbar die *numerische Exzentrizität des Meridiankegelschnittes* der Trägerfläche Φ^* von k^* an. Dieser Meridian ist mithin eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem $\varepsilon \gtreqless 1$, d. h. $\cos^2 \sigma \gtreqless b/a$. Dementsprechend ist auch der Grundriß von k^* eine um ihren Brennpunkt O winkelgestreckte Hyperbel, Parabel, bzw. Ellipse.

Im *hyperbolischen Falle* ($\cos^2 \sigma < b/a$) existieren reelle uneigentliche Schmiegkugelzentren, die Loxodrome besitzt also stationäre Schmiegebenen oder (in der Ausdrucksweise von *K. Zindler*) reelle „*Henkelpunkte*". Diese Stellen liegen, wie leicht einzusehen ist, auf den beiden in Abschn. 5 erwähnten Berührungskreisen des Torus Φ mit dem Leithyperboloid Ψ, und fallen mit den Spitzen der Berührungskurve l zusammen (vgl. Abb. 3). Die Loxodromentangenten sind hier Schmiegtangenten des Torus. — Im *parabolischen Fall* ($\cos^2 \sigma = b/a$) rücken je zwei Henkelpunkte in einem Kehlpunkt zusammen, wo die Loxodrome eine dreipunktig berührende *Wendetangente* aufweist.

Im *elliptischen Fall* ($\cos^2 \sigma > b/a$) ist die Planevolute k^*, wie ihre Gleichung zeigt, eine *affine Torusloxodrome* gleichen Parameters p. Hier kann man die Frage aufwerfen, ob k^* wohl zur Ausgangsloxodrome k selbst affin sein kann? In diesem Fall müßten die Nennerkoeffizienten in (3.3) und (7.3) gleiches Betragsverhältnis besitzen; die Bedingung $b(p^2 - 1) : a = \pm a : b$ führt nun einmal auf $\operatorname{ctg} \sigma = bp/c = \pm i$, also auf die *Minimalloxodromen*, die ja mit ihren Planevoluten sogar identisch sind, das andere Mal jedoch auf den nichttrivialen Wert $p^2 = 1 + (a/b)^2$.

Damit ergibt sich der bemerkenswerte

Satz 7. *Auf jedem Ringtorus gibt es reelle Loxodromen, die zu ihren Planevoluten affin sind. Ihr Meridianschnittwinkel σ steht zum Meridianschnittwinkel σ_1 der Loxodromenkreise in der Beziehung* $2\sin^2\sigma = \sin^2\sigma_1$.

Es muß betont werden, daß in der bestehenden Affinität keineswegs den Loxodromenpunkten die zugehörigen Schmiegkugelzentren zugeordnet werden. Dies würde auch im Widerspruch zu einer früheren Feststellung des Verfassers sein, wonach die einzigen reellen Raumkurven, deren Punkte mit den zugehörigen Schmiegkugelzentren durch eine Affinität gekoppelt sind, die D-Linien der Flächen 2. Ordnung sind[20]. Der Zusammenhang zwischen der Torusloxodrome und ihrer affinen Planevolute ist vielmehr etwa von der Art, wie in der Ebene der Zusammenhang zwischen den Zykloiden und ihren ähnlichen Evoluten.

[20] *W. Wunderlich*: Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken. Mh. Math. **55**, 76—81 (1951).

Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl.

Von

Alexander Aigner, Graz.

(Eingelangt am 6. Mai 1952.)

Daß der in meiner früheren Arbeit „Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern" (Monatsh. f. Math., Bd. 56, Heft 3) dargelegte von der Klassenzahl unabhängige Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ — m enthält nur Primzahlen der Art $3n + 1$, nach denen 2 nicht-kubischer Rest ist — nicht allein dasteht, sei nun durch die Anführung eines zweiten ähnlichen Sonderfalles gezeigt. Es gilt der Satz:

Enthält m den Faktor 2, ferner eine Primzahl der Art $6n + 5$, nach welcher $\sqrt[3]{2}-1$ nicht quadratischer Rest ist, und sonst allenfalls nur noch Primzahlen der Art $6n + 1$, nach denen 2 nicht kubischer Rest ist, so ist $x^3+y^3=z^3$ in $K(\sqrt{m})$, $K(\sqrt{-m})$, $K(\sqrt{3m})$, $K(\sqrt{-3m})$ unmöglich, und zwar unabhängig von der Klassenzahl dieser Körper.

Davon betroffene Werte mit durch 3 teilbarer Klassenzahl wären z. B. $\sqrt{-118}, \sqrt{-334}, \sqrt{-370}, \sqrt{730}$.

Wie sich aus der Arithmetik des Körpers $K(\sqrt[3]{2})$ und seiner Idealgruppen ergibt, sind die Primideale $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, nach denen die Grundeinheit $\sqrt[3]{2}-1$ quadratischer Rest ist, durch Multiplikation mit einer geeigneten Einheit stets auf die Gestalt $(a, b, c) \equiv (1, 0, 0) \bmod 4$ zu bringen, bei $\sqrt[3]{2}-1$ als Nichtrest stets auf $(a, b, c) \equiv (1, 0, 2) \bmod 4$. (Mit Normierung als positive Zahl noch (3, 0, 0), bzw. (3, 0, 2) mod. 4.) Danach kennzeichnen sich die Primzahlen der Art $6n + 5$ (mit einer rationalen Kongruenzwurzel $\sqrt[3]{2}$) in ihrer Darstellung als Norm einer Zahl aus $K(\sqrt[3]{2})$, d. i. durch die Form $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$ als solche mit $\sqrt[3]{2}-1$ als quadratischem Rest (29, 41, 53, 71, 83, ...) oder solche mit $\sqrt[3]{2}-1$ als Nichtrest (5, 11, 17, 23, 47, 59, ...). Zu ersteren gehören speziell die der Form $x^3 + 128y^3$, $x^3 + 256y^3$, sowie $x^3 + 2u^3$ mit ungeradem u und $x^3 + 4u^3$ mit $xu \equiv 3$ (4), zu den letzteren die der Form $x^3 + 16u^3$ oder $x^3 + 32u^3$, sowie $x^3 + 4u^3$ mit $xu \equiv 1$ (4).

Wir setzen also nun $m = 2\,q\,P$, wo $P \gtrless 0$ höchstens Primfaktoren $p \equiv 1\,(6)$ mit 2 als kubischem Nichtrest enthält (auch $P = \pm 1$), und $q \equiv 5\,(6)$ eine Primzahl mit $\sqrt[3]{2}-1$ als quadratischem Nichtrest bedeutet. Nun ist die Lösbarkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von

$$X^4 + 4\,X\,Y^3 = m\,Z^2 \qquad (X, Y) = 1,$$

wo in unserem Falle (gerades m) auch X gerade, und zwar genauer $2^{2v+1} \mid\mid X$, daher $2^2 \mid\mid X^3 + 4\,Y^3$ sein muß. Da ferner kein Primfaktor aus P in $X^3 + 4\,Y^3$ aufgehen kann, so gibt es bei passender Vorzeichenwahl von X und Y nur die zwei Möglichkeiten:

$$X = m\,x_0^2,\ X^3 + 4\,Y^3 = y_0^2 \tag{1}$$

$$X = 2\,P\,x_0^2,\ X^3 + 4\,Y^3 = q\,y_0^2. \tag{2}$$

Der erste Ansatz, wo die Form $X^3 + 4\,Y^3$ zu einem Quadrat zu machen ist, hat (vgl. meine vorige Arbeit, a. a. O. S. 250) die zwei Lösungsscharen:

$$X = r^4 + 4\,r\,s^3,\ Y = -2\,r^3\,s + s^4 \tag{1a}$$

$$X = -2\,r^4 + 24\,r^3\,s - 72\,r^2\,s^2 + 80\,r\,s^3 - 24\,s^4, \text{ beidemal } (r,s) = 1 \tag{1b}$$

$$Y = \quad 3\,r^4 - 16\,r^3\,s + 36\,r^2\,s^2 - 48\,r\,s^3 + 28\,s^4.$$

Dabei führt (1a), wo X dieselbe Form erhält wie vorhin $m\,Z^2$, zum unendlichen Regreß. Bei (1b) stoßen wir auf ein gewisses Polynom; es wird $X = -2\,F(r, s)$. Und die Unmöglichkeit läßt sich nun dadurch erweisen, daß die Primzahl q Nichtteiler dieses Polynomes $F(r, s)$ ist.

Wir schreiben das Polynom mit $r/s = x$ inhomogen

$$F(x) = x^4 - 12\,x^3 + 36\,x^2 - 40\,x + 12$$

und zeigen, daß die Kongruenz $F(x) \equiv 0\,(q)$ keine Wurzel hat. ($s \equiv 0$, d. h. $r \equiv s \equiv 0$ zählt nichts.) Die Gleichung $F(x) = 0$ gibt aufgelöst

$$x_1 = 3 + \sqrt{3 - \sqrt[3]{2}} + \sqrt{3 - \varrho\,\sqrt[3]{2}} + \sqrt{3 - \varrho^2\,\sqrt[3]{2}}$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{3 - \sqrt[3]{2}} - \sqrt{3 - \varrho\,\sqrt[3]{2}} - \sqrt{3 - \varrho^2\,\sqrt[3]{2}}$$

$$x_3 = 3 - \sqrt{3 - \sqrt[3]{2}} + \sqrt{3 - \varrho\,\sqrt[3]{2}} - \sqrt{3 - \varrho^2\,\sqrt[3]{2}}$$

$$x_4 = 3 - \sqrt{3 - \sqrt[3]{2}} - \sqrt{3 - \varrho\,\sqrt[3]{2}} + \sqrt{3 - \varrho^2\,\sqrt[3]{2}}$$

wobei ϱ die 3. Einheitswurzel vorstellt. Die Diskriminante ist $-2^{14} \cdot 3^3$, ein -3-faches Quadrat, und nur die Primzahlen 2 und 3 sind kritisch. Die galois-sche Gruppe ist die symmetrische $\mathfrak{S}_4$; der galois-sche Körper, der alle vier Wurzeln enthält, ist $K(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{\sqrt[3]{2}-1}, \sqrt{\varrho\sqrt[3]{2}-1})$.

Die letzten zu den x_i führenden Adjunktionen sind Quadratwurzeln aus einer Einheit, denn es ist $3-\sqrt[3]{2}=(1+\sqrt[3]{4})^2(\sqrt[3]{2}-1)$. Daß $F(x)$ eine Kongruenzwurzel mod. q hat, ist gleichbedeutend damit, daß q in einem Körper, der (mindestens) eine Wurzel x_i enthält, ein Primideal 1. Grades abspaltet. (Denn genau dann ist x kongruent einer natürlichen Zahl.) Es ist aber leicht einzusehen, daß dies nicht eintritt. Denn q zerfällt zunächst nicht in $K(\sqrt{-3})$, nur in $K(\sqrt[3]{2})$ in ein Primideal 1. Grades $\mathfrak{q}_1$ und ein solches 2. Grades $\mathfrak{q}_2$. Dieses $\mathfrak{q}_1$ zerfällt dann wieder nicht bei Adjunktion von $\sqrt{-3}$, ebenso — laut Voraussetzung — nicht bei $\sqrt[3]{2-1}$, es zerfällt nur bei Adjunktion von $\sqrt{-3(\sqrt[3]{2}-1)}$ in zwei weitere Primideale 1. Grades $\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{q}_1''$. Dieser Körper $K(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3(\sqrt[3]{2}-1)})$ enthält noch kein x_i, denn die Gruppe von $F(x)$ über ihm ist die Potenzgruppe des Viererzyklus (1324), welche kein Element festläßt. Er ist aber bereits der Zerlegungskörper der Primzahl q. Denn der einzige (relativ quadratische) Zwischenkörper entsteht nun durch Adjunktion von $\sqrt{-3}$ (und enthält noch immer kein x_i); schon hiebei zerlegen sich $\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{q}_1''$ aber nicht mehr, denn -3 ist Nichtrest. Es gibt also bereits kein Primideal 1. Grades von q mehr. Daher ist die Kongruenz $F(x)\equiv 0\ (q)$ unlösbar und somit der Ansatz nach (1b) $X=2Pqx_0^2$ hinfällig.

Jetzt ist noch der zweite Ansatz (2) durchzugehen; er erledigt sich durch einfache Kongruenzrechnungen. Da enthält $X+Y\sqrt[3]{4}$ den Faktor $\sqrt[3]{2}$ genau in 2. Potenz und es wird, wenn $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ mit $2\nmid a$, $4\mid b$, $2\parallel c$ (siehe anfangs) einen Teiler von q bedeutet, entweder

$$X+Y\sqrt[3]{4}=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})(f+g\sqrt[3]{2}+h\sqrt[3]{4})^2 \qquad (3a)$$

oder

$$X+Y\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2}-1)(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})(f+g\sqrt[3]{2}+h\sqrt[3]{4})^2 \qquad (3b)$$

beidesmal mit geradem f, aber ungeradem g (weil $\sqrt[3]{2}$ in 1. Potenz). Der Koeffizientenvergleich führt bei (3a) auf

$$\begin{aligned} af^2+4agh+4bfh+2bg^2+4cfg+4ch^2&=X\\ 2afg+2ah^2+bf^2+4bgh+2cfh+2cg^2&=0 \end{aligned} \qquad (4a)$$

(Y unwichtig). Aus der unteren Gleichung folgt zunächst $2\mid h$ (weil alle übrigen Glieder außer $2ah^2$ sicher durch 4 teilbar sind); dann aber wegen $2cg^2\equiv 4\ (8)$ auch $2afg\equiv 4\ (8)$, also $2\parallel f$ (weil nun alle übrigen Glieder 8 enthalten). Damit wird aber nach der oberen Gleichung des Ansatzes (4a) $X\equiv 4\ (8)$, was sich mit dem geraden Wert von m (quadratfrei) nicht verträgt. (3a) scheidet also aus.

Ebenso unzulässig ist aber auch (3b). Hier ergibt ein Koeffizientenvergleich

$$a f^2 + 4 a g h + 4 b f h + 2 b g^2 + 4 c f g + 4 c h^2 - \\ - 2 a f g - 2 a h^2 - b f^2 - 4 b g h - 2 c f h - 2 c g^2 = 0 \qquad (4b)$$

was schon allein unerfüllbar ist. Denn zunächst muß (wegen des Gliedes $2 a h^2$) h gerade sein; dann wird aber wegen $a f^2 - 2 a f g \equiv 0$ (8) und $2 c g^2 \equiv 4$ (8) (alle übrigen Glieder sind Vielfache von 8) der ganze Ausdruck (4b) $\equiv 4$ (8) und kann nicht verschwinden. — Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und ist der Satz bewiesen.

Die Möglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ hängt also auch zusammen mit der Zerlegung der Primfaktoren von m im Körper $K(\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1})$, der Quadratwurzel aus der Grundeinheit des $K(\sqrt[3]{2})$, bzw. im galois-schen Körper des betrachteten Polynoms. — Durch analoge Gruppenbetrachtungen beantwortet sich auch die Frage der Kongruenzwurzeln für die übrigen Primzahltypen. So hat nach einer Primzahl $p \equiv 1$ (3) mit 2 als kubischem Nichtrest $F(x) \equiv 0$ genau *eine* Wurzel: p zerfällt in $K(\sqrt{-3})$, über dem das Polynom die Gruppe $\mathfrak{A}_4$ hat, dann aber nicht weiter bei Adjunktion von $\sqrt[3]{2}$ (Vierergruppe $\mathfrak{v}_4$) daher noch in einem der 4 konjugierten Oberkörper, über denen der Galois'sche nur mehr zyklisch vom Grad 3 ist. Dies sind die $K(\sqrt{-3}, x)$ mit genau einer Wurzel (somit auch in $K(x)$ ein $\mathfrak{p}$ ersten Grades vorhanden), d. h. $F(x) = 0$ besitzt genau eine Kongruenzwurzel. — Primzahlen $q \equiv 5$ (6) mit $\sqrt[3]{2} - 1$ als quadratischem Rest haben genau *zwei* Wurzeln: Zerlegungskörper $K(\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}, x_1) = K(x_1, x_2)$.

Von den Primzahlen $p \equiv 1$ (3) mit 2 als kubischem Rest schließlich gibt es zwei Sorten: 1. solche, wo $\sqrt[3]{2} - 1$ nach allen drei $\mathfrak{p}$, in welche p in $K(\sqrt[3]{2})$ zerfällt, quadratischer Rest ist, oder wo alle drei rationalen Kongruenzwerte $\sqrt[3]{2} - 1$ mod. p quadratische Reste sind (127, 229, ...); sie zerfallen im Galois-Körper vollständig und haben daher *vier* Wurzeln. — 2. aber solche p, wo nur nach einem dieser $\mathfrak{p}$ $\sqrt[3]{2} - 1$ quadratischer Rest ist, oder nur ein rationaler Kongruenzwert von $\sqrt[3]{2} - 1$ mod. p quadratischer Rest ist, die beiden anderen nicht (31, 43, 109, ...); nach ihnen hat $F(x) \equiv 0$ *keine* Wurzel. Sie zerfallen zwar vollständig in $K(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2})$, dann aber endet es in einem der 3 konjugierten Zwischenkörper, worüber die Gruppe des Polynoms die Zweiergruppe eines Transpositionspaares ist, der also noch keine Wurzel x_i enthält.

Über das Produkt zweier komplexer inhomogener Linearformen.

Von

Leopold Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 12. Mai 1952.)

Minkowski[1] bewies den folgenden Satz: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ seien reell mit $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$. Dann gibt es stets einen Gitterpunkt (x, y), so daß $|\alpha x + \beta y - \xi|\,|\gamma x + \delta y - \eta| \leqq 1/4$. Die Schranke kann nicht verbessert werden.

Hlawka[2] zeigte als erster: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ seien komplex. Dann gilt ein analoger Satz für die ganzen Zahlen aus dem Körper $K(i)$ mit der Schranke $1/2$ und diese Schranke kann nicht mehr verbessert werden. Neubeweise für diesen Satz stammen von *Mahler*[3], später von *Perron*[4]. In diesen Arbeiten wird aber darüber hinaus gezeigt, daß für den Körper $K(i\sqrt{2})$ die „beste" Schranke $3/4$ und für den Körper der dritten Einheitswurzel $1/3$ ist. In diesem Zusammenhange darf es ein gewisses Interesse beanspruchen, daß man bei ausgiebiger Verwendung der von *Perron* entwickelten Methode einen analogen Satz für die Approximation des Produktes inhomogener Linearformen durch ganze Zahlen aus dem Körper $K(i\sqrt{7})$ beweisen kann. Eine kurze Darstellung des Beweises erscheint vielleicht dadurch gerechtfertigt — obwohl er sich eng an die Ideen von *Perron* anschließt — daß man auch im Falle des $K(i\sqrt{7})$ bis zur „scharfen Schranke" vordringen kann, was anscheinend noch nicht bemerkt worden ist. Es soll also folgender *Satz* gezeigt werden: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ seien komplexe Zahlen mit $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$. Dann gibt es stets ganze Zahlen aus $K(i\sqrt{7})$, so daß

$$|\alpha x + \beta y - \xi|\,|\gamma x + \delta y - \eta| \leqq 4/7. \tag{1}$$

Die Schranke ist die „bestmögliche".

---

[1] *Minkowski*: Diophantische Approximationen.

[2] *Hlawka*: Monatshefte f. Math. u. Physik **46**, 324—334 (1938).

[3] *Mahler*: J. London, Math. Soc. **15**, 213—236 (1940).

[4] *Perron*: Matematisk Tidsskrift, B 1949, 1—17 und die dort zit. Arbeit desselben Verf. Sitzungsber. d. Bayr. Akademie d. Wissenschaften 1946, 159—165.

Beweis: Für die letzte Behauptung betrachte man:

$$\left| x - \frac{1}{2} - \frac{3i}{2\sqrt{7}} \right| \left| y - \frac{1}{2} - \frac{3i}{2\sqrt{7}} \right| \leqq c_1.$$

Diese Ungleichung ist mit $c_1 < 4/7$ offenbar für kein ganzzahliges (x, y), aus dem Körper $K(i\sqrt{7})$ erfüllbar. Für das Weitere schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ seien beliebig komplex mit $|\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1| = 1$. Die Ungleichung $|\alpha_1 x + \beta_1 y| \, |\gamma_1 x + \delta_1 y| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ hat stets eine Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ mit ganzen Zahlen aus $K(i\sqrt{7})$.

Dieser Satz stammt von *Hofreiter*[5]. Die Möglichkeit dieser Formulierung geht auf *Perron*[6] zurück.

Zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 sollen kongruent mod $(1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2})$ heißen, wenn sie sich nur um ganze Zahlen aus $K(i\sqrt{7})$ unterscheiden. Nun formulieren wir den

Hilfssatz 2: h, a seien komplexe den Bedingungen

$$|a| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \tag{2}$$

$$|ha| \leqq \frac{1}{\sqrt{7}} \tag{3}$$

unterworfene Zahlen. Zu jedem z_1 gibt es ein mod $(1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2})$ kongruentes z, so daß

$$|z^2 - h^2| \leqq \frac{4}{7|a|}. \tag{4}$$

Beweis: Zunächst sei

$$|h^2| \, |a| \geqq \frac{2}{7} \tag{5}$$

(4) enthält den Kreis

$$\left| z - \frac{\sqrt{49|h|^4|a|^2 - 4}}{7\overline{h}|a|} \right| = \frac{2}{7|ha|}$$

im Innern. Es ist ja für Punkte z auf (5)

---

[5] *Hofreiter*: Monatshefte f. Math. u. Phys. **45**, 175—190 (1937).
[6] *Perron*: Math. Zeitschrift **37**, 749—767 (1933).

$(z^2 - h^2)\, e^{-i\varphi} = 4/49\, \overline{h^2}\, |a|^2 [\sqrt{49\,|h|^4\,|a|^2 - 4} - 2i \sin\varphi] \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$

Also $|z^2 - h^2|^2 \leqq \dfrac{16 \cdot 49\,|h^4|\,|a^2|}{49^2\,|h^4|\,|a^4|} = \left(\dfrac{4}{7\,|a|}\right)^2$.

Es ist aber $\dfrac{2}{7\,|ha|} \geqq \dfrac{2}{7}\sqrt{7} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ wegen (3) und der Kreis $|z| \leqq \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ enthält die Punkte $\pm 1/2 \pm i\dfrac{3}{2\sqrt{7}}, \pm\dfrac{2i}{\sqrt{7}}$ und dann auch die durch diese Punkte bestimmte Wabenzelle. Damit ist mit (5) (4) bewiesen.

Sei nun

$$|h|^2\,|a| < \frac{2}{7}. \tag{7}$$

Man betrachte $I = |z^2 - h^2|^2$ und $II = |(z-1)^2 - h^2|^2$. Mit den Bezeichnungen $z = x + iy$, $x(1-x) = u$, $y^2 = v$ wird

$$III = (1-x)\,I + x\,II = u - 3u^2 + 2uv + v^2 - 2|h|^2 \cos(\arg h^2)(u - v) + |h|^4. \tag{8}$$

Offenbar kann man sich auf das Intervall $-1/2 < x \leqq 1/2$ und

$$-\frac{\sqrt{7}}{4} < y \leqq \frac{\sqrt{7}}{4}$$

beschränken. Die Behauptung bleibt ungeändert, wenn man x in $-x$ und y in $-y$ übergehen läßt, so daß man

$$0 \leqq x \leqq 1/2 \text{ und } -\frac{\sqrt{7}}{4} < y \leqq \frac{\sqrt{7}}{4}$$

voraussetzen kann. Somit sind $1 - x$ und x stets nicht negativ. Man hat also

$$0 \leqq u \leqq 1/4,\ 0 \leqq v \leqq 7/16. \tag{9}$$

Um III abzuschätzen, sei $f(v) = v^2 + 2uv + 2|h|^2 \cos(\arg h^2)\, v$, also $f''(v) = 2 > 0$. Das Maximum von $f(v)$ liegt also bei $v = 0$ oder $v = 7/16$.

$v = 0$: $III \leqq u - 3u^2 - 2|h|^2 \cos(\arg h^2)\, u + |h|^4 \leqq u - 3u^2 + 2|h|^2 u + |h|^4 < u - 3u^2 + \dfrac{4u}{7\,|a|} + \dfrac{4}{49\,|a|^2}$ wegen (7).

Somit:

$$III < -3\left(u - \frac{2}{21\,|a|} - 1/6\right)^2 + 1/12 + \frac{2}{21\,|a|} + \frac{16}{49 \cdot 3\,|a|^2} \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{1}{12\sqrt{8}} + \frac{2}{21\sqrt[4]{8}} + \frac{16}{49 \cdot 3}\right)\frac{1}{|a|^2}$$

wegen (2). Also $III < \frac{1}{|a|^2}(0,03 + 0,06 + 0,11) < \frac{16}{49\,|a|^2}$.

$v = 7/16$: $III \leqq -3u^2 + \frac{15u}{8} + 49/256 - 2|h|^2 \cos(\arg h^2)$ $(u - 7/16) + |h|^4$ und wegen $u < 7/16$ ist $III \leqq -3u^2 + \frac{15u}{8} +$ $+ 49/256 + 2|h|^2(7/16 - u) + |h|^4 < -3u^2 + \frac{15u}{8} + 49/256 +$ $+ \frac{4}{7|a|}(7/16 - u) + \frac{4}{49|a|^2}$.

Sei zunächst $u \geqq \mathrm{Max}\{0{,}5/16 - \frac{2}{21|a|}\}$. Man hat: $16/49 > 0{,}326$

Sei $g(u) = -3u^2 + \frac{15u}{8} - \frac{4u}{7|a|}$. Dann ist aber $g'(u) \leqq 0$, also entweder:

$$III \leqq 49/256 + \frac{1}{4|a|} + \frac{4}{49|a|^2} \leqq \left(\frac{49}{256\sqrt{8}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{8}} + 4/49\right)\frac{1}{|a|^2} <$$

$$< (0,07 + 0,15 + 0,09)\frac{1}{|a|^2} = \frac{0,31}{|a|^2} < \frac{0,326}{|a|^2} < \frac{16}{49} \cdot \frac{1}{|a|^2}$$

oder:

$$III \leqq -3(5/16 - \frac{2}{21|a|})^2 + \frac{15}{8}(5/16 - \frac{2}{21|a|}) + \frac{4}{7|a|}(1/8 +$$

$$+ \frac{2}{21|a|}) + \frac{4}{49|a|^2} + \frac{49}{256} = 31/64 + \frac{1}{14|a|} + \frac{16}{49 \cdot 3|a|^2} \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{31}{64\sqrt{8}} + \frac{1}{14\sqrt[4]{8}} + \frac{16}{49 \cdot 3}\right)\frac{1}{|a|^2} < \frac{0,325}{|a|^2} < \frac{0,326}{|a|^2} < \frac{16}{49\,|a|^2}.$$

Ist aber $u < \frac{5}{16} - \frac{2}{21|a|}$, dann ist $g'(u) > 0$ und das Maximum von $g(u)$ liegt wieder bei $5/16 - \frac{2}{21|a|}$. Damit ist (4) vollständig bewiesen.

Nun gehen wir im Beweis des Satzes weiter. Bekanntlich läßt sich $(\alpha x + \beta y\,\xi)(\gamma x + \delta y - \eta)$ mittels der Transformation $x = px' + qy'$, $y = rx' + sy'$ auf die Form

$$a(x' - \mu)^2 + b(x' - \mu)(y' - \nu) + c(y' - \nu)^2 \qquad (10)$$

bringen. Hiebei sind p, q, r, s ganze Zahlen aus $K(i\sqrt{7})$ mit $(p, r) = 1$

und $ps - qr = 1$. Diese Wahl von s und q ist möglich, da im $K(i\sqrt{7})$ der euklidische Algorithmus gilt. Es ist hiebei

$$a = \alpha\gamma p^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma) pr + \beta\delta r^2$$

und nach Hilfssatz 1 lassen sich ganze Zahlen aus $K(i\sqrt{7})$ mit $(p, r) = 1$ so wählen, daß $|a| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$. Wir schreiben statt x', y' wieder x, y. O. B. d. A. kann $b^2 - 4ac = 1$ angenommen werden.

Ist nun erstens $a = 0$, also $b = \pm 1$, dann mache man $|y - \nu| \leqq \frac{2}{\sqrt{7}}$ und dann durch Wahl von x $|x - \mu + c(y - \nu)| \leqq \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Ist zweitens $a \neq 0$, dann läßt sich (10) auf die Gestalt bringen:

$$a\left\{[(x - \mu + \frac{b}{2a}(y - \nu)]^2 - \frac{1}{4a^2}(y - \nu)^2\right\}.$$

Man wähle wieder y so, daß $|y - \nu| \leqq \frac{2}{\sqrt{7}}$ und setze nun $h = \frac{y - \nu}{2a}$, $x - \mu + \frac{b}{2a}(y - \nu) = z$. Dann ist aber nach Hilfssatz 2 alles gezeigt.

Wir schließen noch eine Bemerkung an: Wenn das Analogon zum Hilfssatz 1 für den Körper $K(i\sqrt{11})$ mit $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, wie man vermutete, richtig ist, dann dürfte man auch in diesem Falle mit dieser Methode für die „scharfe Schranke" 9/11 statt 4/7 durchkommen. Allerdings wurde kürzlich behauptet[7], daß das Analogon zum Hilfssatz 1 nur mit der Schranke $2/\sqrt{5}$ richtig ist, welche nicht genügt, um mit der Methode von *Perron* die vermutliche Schranke 9/11 zu erreichen.

[7] *Descombes et Poitou*: C. R. Acad. Sci., **231**, 264—266 (1950).

Über die Böschungslinien auf Drehquadriken.

Von

Rudolf Bereis, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingelangt am 15. Mai 1952.)

Die Böschungslinien (Kurven konstanter Steigung) auf Drehflächen 2. Ordnung mit lotrechter Achse waren des öfteren Gegenstand eingehender Untersuchungen sowohl analytischer wie auch konstruktiver Natur[1]. Die vorliegende Mitteilung will einen neuen konstruktiven Weg zeigen, der sich fast nur elementarer Hilfsmittel bedient und die charakteristische Gestalt der Grundrisse der genannten Böschungslinien — es handelt sich um Zykloiden — in durchsichtigster Weise erkennen läßt.

In § 1 werden zunächst die wichtigsten Eigenschaften einer Drehschar von Zykloiden untersucht, wobei sich zeigt, daß die *Isoklinen* des dadurch indizierten Richtungsfeldes stets eine *Drehschar konzentrischer Ellipsen* darstellen. Durch den Übergang zu Drehscharen konzentrischer *Hyperbeln* in § 2 wird die Existenz von reellen Radlinien mit imaginären Rollkreisen, den sogenannten *Pseudozykloiden*, unmittelbar verständlich; gleichzeitig wird eine neue und sehr bequeme Konstruktion dieser merkwürdigen Kurven gewonnen. In § 3 erfolgt sodann die Anwendung der gewonnenen Sätze auf die Böschungslinien der verschiedenen Drehquadriken.

§ 1. Drehscharen von Zykloiden.

Rollt in der Ebene ein Kreis k (Radius $r \gtrless 0$) auf einem festen Kreis k_0 (Radius $r_0 > 0$), so beschreibt jeder seiner Umfangspunkte

[1] *E. Cesàro:* Vorlesungen über natürliche Geometrie (Leipzig 1901), S. 183. — *W. Blaschke:* Bemerkungen über allgemeine Schraublinien, Mh. Math. Phys. 19 (1908); Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, Berlin (1930), 40—42; Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1950, 28—31).

J. Krames: Die zyklographische Abbildung der Böschungskurven auf Drehflächen 2. Grades mit lotrechter Achse, Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien 144 (1935).

W. Wunderlich: Über Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung, Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien 155 (1947).

eine Zykloide, deren Spitzen auf dem Fixkreis k_0 (Spitzenkreis) und deren Scheitel auf einem konzentrischen Kreis k_1 (Scheitelkreis) mit dem

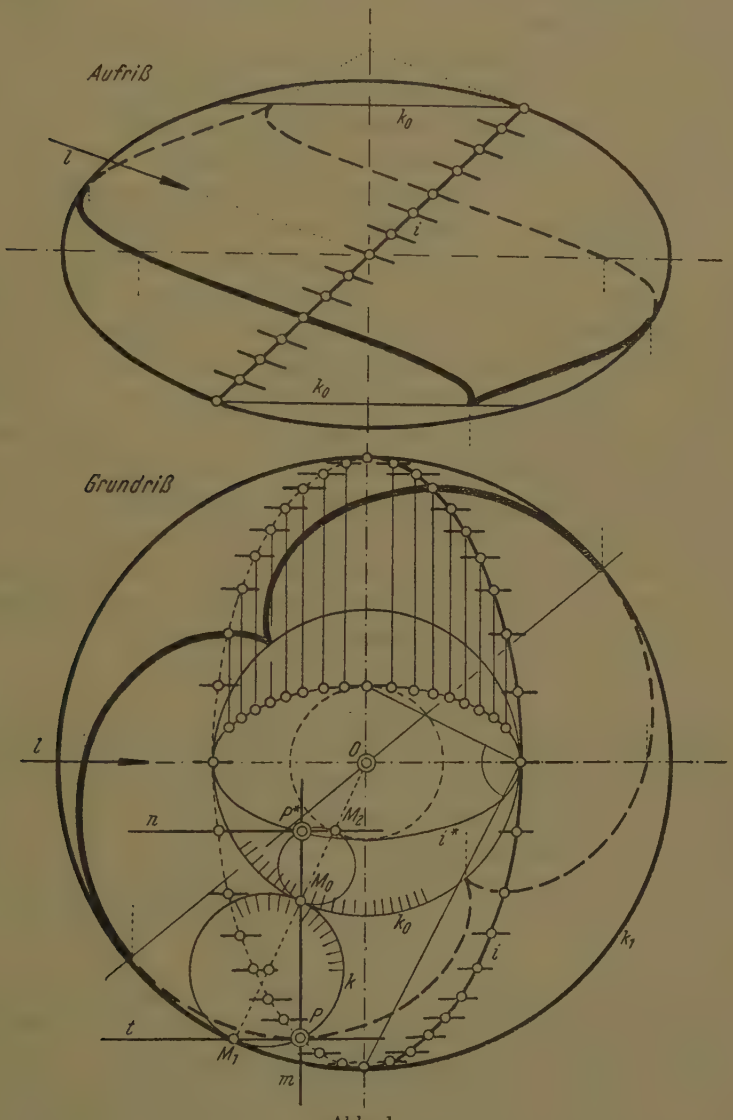

Abb. 1.

Radius $r_1 = r_0 + 2\,r$ liegen. Man spricht von einer *Epizykloide*, wenn k im Außengebiet von k_0 rollt, wobei es gleichgültig ist, ob k den Fixkreis

k_0 umschließt oder nicht ($r>0$ oder $r<-r_0$); man spricht hingegen von einer *Hypozykloide*, wenn k im Inneren von k_0 rollt ($-r_0<r<0$). Der Berührungspunkt M_0 der Kreise k und k_0 stellt jeweils das *Momentanzentrum* der Rollbewegung dar. Bekanntlich geht für jeden mitgenommenen Punkt P die Bahnnormale m durch M_0, so daß speziell für einen Umfangspunkt P die Bahntangente t durch den Gegenpunkt M_1 von M_0 auf k, also durch den Berührungspunkt mit k_1 geht (Abb. 1).

Die Bahnen sämtlicher Umfangspunkte von k bilden eine *Drehschar* von Zykloiden, d. h. die Individuen der Schar werden durch Drehung um die Fixkreismitte 0 untereinander vertauscht. Durch jeden Punkt des Kreisringes mit den Radien r_0, r_1 gehen zwei Kurven der Schar. Jeder Punkt des Kreisringinneren ist demnach Träger zweier (reell getrennter) Linienelemente. Die Integralkurven dieses Richtungsfeldes sind die Zykloiden der Drehschar. Sammelt man alle zu einer festen Richtung l parallelen Elemente, so gelangt man zu den sogenannten *Isoklinen* des Richtungsfeldes. Auf Grund der geschilderten Tangentenkonstruktion der Zykloide erhält man den zur Tangentenrichtung l gehörigen Punkt P einer beliebigen Lage des Rollkreises k, indem man die Geraden $M_0 P \perp l$ und $M_1 P \parallel l$ zum Schnitt bringt (Abb. 1). Die so gefundenen Punkte P erfüllen demnach eine *Ellipse* i mit den Scheitelkreisen k_0 und k_1 (Ellipsenkonstruktion von *Proklus*). Die zur Richtung l parallelen, bzw. normalen Halbachsen haben die Längen

$$a = r_0,\ b = r_1 = r_0 + 2r \ldots \tag{1}$$

Wir haben damit den für das folgende grundlegenden

Satz 1a: *Die Isoklinen des durch eine Drehschar konzentrischer Zykloiden definierten Richtungsfeldes bilden eine Drehschar konzentrischer Ellipsen. Die auf einer Isoklinenellipse aufgereihten Linienelemente sind dabei zu einer Ellipsenachse parallel.*[2]

Die richtungsanzeigende Achse a ist im Falle von *Epizykloiden* die *Nebenachse* ($0 < a^2 < b^2$, vgl. Abb. 1), im Falle von *Hypozykloiden*

---

[2] Dieser Sachverhalt findet sich im wesentlichen bereits bei *A. Mannheim:* Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes. Journ. éc. polytechn. 40 (1863), 205—230.

Allgemeiner gilt, wie an gleicher Stelle erwähnt wird: „Legt man aus einem eigentlichen Punkt L Tangenten an eine Drehschar konzentrischer Zykloiden, so ist der Ort der Berührungspunkte die Fußpunktkurve eines Kegelschnittes inbezug auf L, also eine rationale bizirkulare Quartik. Vgl. diesbezüglich auch *C. Juel:* Question 56, L'interméd. des mathém. 1 (1894), 22 u. 243, *Fr. Fabricius-Bjerre:* Über zykloidale Kurven in der Ebene und im Raum, Dan. Mat. Fys. Medd. 26, no. 9 (1951).

die *Hauptachse* ($0 < b^2 < a^2$).

Da die Drehscharen der Zykloiden und die ihrer Isoklinen einander eindeutig bestimmen, so gilt von Satz 1a auch die Umkehrung:

Satz 1b: *Bilden die Isoklinen eines Richtungsfeldes eine Drehschar konzentrischer Ellipsen mit den Halbachsen a, b und sind die längs einer Isoklinenellipse zusammengefaßten Linienelemente zur Achse a parallel, so bilden die Integralkurven eine Drehschar von Zykloiden mit dem Spitzenkreisradius $r_0 = a$ und dem Scheitelkreisradius $r_1 = b$.*

Der Rollkreisdurchmesser kann dann mit $2r = b - a$ angegeben werden.

Denkt man sich die Rollung *gleichförmig* ablaufend, dann wird der Punkt M_1 den Scheitelkreis k_1 mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, während sich die Tangente t mit konstanter Geschwindigkeit dreht. *Eine Gerade, die gleichförmig um einen ihr angehörigen Punkt rotiert, der seinerseits mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis wandert, wird demnach stets eine Zykloide umhüllen*[3]. Beachtet man nun, daß die Zykloidennormale m genau eine solche Veränderung erfährt — sie dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit um den gleichförmig auf k_0 wandernden Pol M_0 — so erkennt man, daß die von m eingehüllte *Zykloidenevolute* selbst eine Zykloide, und zwar eine *ähnliche* ist. Das Ähnlichkeitsverhältnis hat den Wert $\lambda = r_0 : r_1$ und die Evolutennormale n ($// t$) dreht sich daher um jenen Punkt M_2 von $0\,M_0$, dessen Zentralabstand $0\,M_2 = \lambda\, r_0 = r_0^2/r_1$ ist (Abb. 1). Der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt P^* ist der Fußpunkt des aus M_2 auf m gefällten Lotes. Daraus folgt, daß die den Punkten P einer Isoklinenellipse i zugeordneten Bahnkrümmungsmitten P^* selbst eine gewisse *Ellipse* i^* erfüllen, die mit i die Achse $2a$ gemein hat und durch Multiplikation aller Abstände von dieser Achse mit dem Faktor a^2/b^2 aus i hervorgeht (perspektive Affinität). Die andere Halbachse beträgt somit $b^* = a^2/b$; i und i^* sind also ähnliche Ellipsen.

Damit läßt sich ein *neues Zeichenverfahren für Zykloiden* ableiten, das auf einer graphischen Integration beruht:

Um eine Zykloide mit vorgegebenem Spitzen- und Scheitelkreis zu zeichnen, bereitet man zunächst eines der (ähnlichen) Ellipsenpaare i, i^* vor und überzieht es mit einem Parallelenraster normal zur gemeinsamen Achse (Affinitätsstrahlen). Sodann befestigt man ein durch-

[3] In dieser besonders zweckmäßigen Form findet sich diese dem Wesen nach schon viel länger bekannte Erzeugungsweise der Zykloiden bei *R. Blum*; Cykloiden u. Cykloidalen usw., Progr. Wilhelms-Realsch. Stuttgart (1902).

sichtiges Pauspapier drehbar um die Mitte 0, markiert darauf einen geeigneten Anfangspunkt P und dreht es, bis P auf i zu liegen kommt. Der Raster gestattet nun hinreichend genau das zugehörige Krümmungszentrum P^* auf i^* aufzusuchen, so daß ein Stück des Krümmungskreises gezeichnet werden kann. Auf diesem wird nun ein Nachbarpunkt Q gewählt, nach i gedreht und so verfahren, wie bei P. In dieser Weise fortfahrend erhält man die gewünschte Zykloide auf dem Pauspapier durch aneinandergereihte Bogenstücke von Krümmungskreisen in vollkommen befriedigender Weise approximiert.

Besondere Bedeutung kommt dieser Methode bei den im nächsten Abschnitt zu erörternden *Pseudozykloiden* zu, bei welchen ja die gewöhnliche Rollkreiskonstruktion nicht ausführbar ist, während bei dem hier geschilderten Vorgang lediglich Hyperbeln an Stelle der Ellipsen treten.

Abschließend wäre noch auf den *Grenzfall* hinzuweisen, der zu $r = \infty$ gehört: Der Rollkreis wird zu einer Tangente des Fixkreises k_0, die auf k_0 abrollt. Die Zykloiden gehen damit in *Kreisevolventen* über. Die Isoklinen der Evolventen-Drehschar arten in die Drehschar der parallelen Tangentenpaare von k_0 aus.

§ 2. Drehscharen von Pseudozykloiden.

Setzt man statt der Ellipsen jetzt eine Drehschar konzentrischer *Hyperbeln* als Isoklinen i voraus, so stellen sich als Integralkurven die sogenannten *Pseudozykloiden* ein, jene merkwürdigen transzendenten Linien, die als reelle Bahnen gewisser komplexer Kreisrollungen aufgefaßt werden können[4]. Die Existenz dieser Kurven wird von diesem Gesichtspunkt aus besonders einleuchtend: Man hat in den voranstehenden Ausführungen lediglich für a oder b auch *rein-imaginäre Werte* zuzulassen, was unter Berufung auf die „analytische Fortsetzung" zweifellos angängig ist.

Gemäß (1) ist dann entweder der Spitzenkreis oder der Scheitelkreis nullteilig (Radius rein imaginär). Im ersten Fall spricht man von einer *Hyperzykloide* (ein reeller Scheitel, Spitzen imaginär, Abb. 2), im zweiten Fall von einer *Parazykloide* (eine reelle Spitze, Scheitel imaginär).

Als Seitenstücke zu den Sätzen 1a und 1b gelten jetzt

---

[4] *H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven, Leipzig (1908), 211ff.
E. Wölffing: Über Pseudotrochoiden, Ztschr. Math. Phys. 44 (1899), 139—166.

Satz 2a: *Die Isoklinen des durch eine Drehschar konzentrischer Pseudozykloiden definierten Richtungsfeldes bilden eine Drehschar konzentrischer*

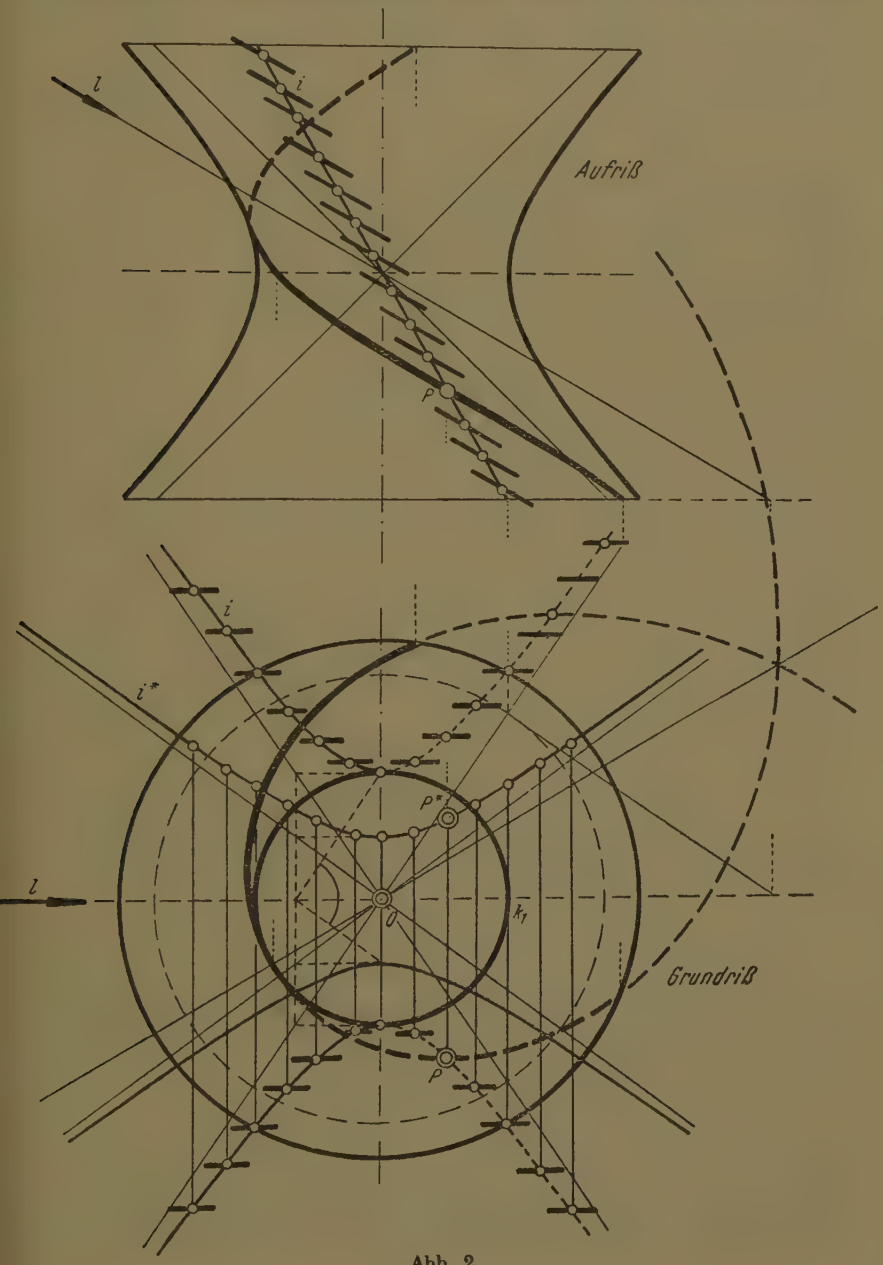

Abb. 2.

Hyperbeln. Die auf einer Isoklinenhyperbel aufgereihten Linienelemente sind dabei zu einer Hyperbelachse parallel.

Die richtungsanzeigende Achse a ist im Falle von *Hyperzykloiden* die *imaginäre Achse* ($a^2 < 0 < b^2$, vgl. Abb. 2), im Falle von *Parazykloiden* die reelle Achse ($b^2 < 0 < a^2$).

Da die Drehscharen der Pseudozykloiden und die ihrer Isoklinen einander eindeutig bestimmen, so gilt von Satz 2a wieder die Umkehrung:

Satz 2b: *Bilden die Isoklinen eines Richtungsfeldes eine Drehschar konzentrischer Hyperbeln mit den Halbachsen a, b (a oder b rein imaginär) und sind die längs einer Isoklinenhyperbel zusammengefaßten Linienelemente zur Achse a parallel, so bilden die Integralkurven eine Drehschar von Pseudozykloiden mit dem Spitzenkreisradius $r_0 = a$ und dem Scheitelradius $r_1 = b$.*

Der Rollkreisdurchmesser kann dann wieder mit $2r = b - a$ angegeben werden und ist auf jeden Fall komplex.

In Übertragung der in § 1 gekennzeichneten Krümmungsverhältnisse gilt analog folgender Sachverhalt: Die den Punkten P einer Isoklinenhyperbel i zugeordneten Bahnkrümmungsmitten P^* erfüllen eine gewisse *Hyperbel* i^*, die mit i die Achse $2a$ gemein hat und durch Multiplikation aller Abstände von dieser Achse mit dem Faktor a^2/b^2 aus i hervorgeht (perspektive Affinität). Die andere Halbachse beträgt somit $b^* = a^2/b$; i und i^* haben zueinander normale Asymptoten.

Auf die vorteilhafte Möglichkeit, Pseudozykloiden unter Heranziehung dieses Hyperbelpaares i, i^* auf einem drehbaren Pauspapier zu zeichnen, wurde bereits in § 1 hingewiesen.

Artet die Isoklinenhyperbel im *Grenzfall* in ein Geradenpaar aus, so sind die Integralkurven des zugehörigen Richtungsfeldes isogonale Trajektorien des Strahlbüschels 0, also *logarithmische Spiralen*.

§ 3. Böschungslinien auf Drehquadriken.

Eine Raumkurve, deren Tangenten mit einer festen, horizontal gedachten Ebene einen unveränderlichen Winkel α ($\neq 0, \neq \pi/2$) einschließen, heißt *Böschungslinie*. Die Tangenten der Böschungslinien sind bekanntlich Fallinien ihrer Schmiegebenen.

Sammelt man, um zu den auf einer vorgelegten Fläche Φ verlaufenden Böschungslinien zu gelangen, auf Φ alle Böschungselemente einer bestimmten Richtung l, so erfüllen ihre Punkte die *Eigenschattengrenze* i von Φ für die zu l parallele Beleuchtung. Variiert man die Lichtrichtung

l ohne die Horizontalneigung α zu verändern, so erhält man auf Φ ein Kurvensystem (i), das zu den α-Böschungslinien auf Φ konjugiert ist. Die Grundrisse der Lichtgrenzen i stellen die *Isoklinen* für das durch die Grundrisse der α-Böschungslinien definierte Richtungsfeld dar.

Ist Φ speziell eine *Dreh-* oder *Schraubfläche*, dann sind im Grundriß beide Kurvensysteme *Drescharen*. Der Grundriß der Achse gibt den Drehpol 0.

Ist Φ insbesondere eine *Drehfläche 2. Grades* (*Drehquadrik*), dann tritt als Eigenschattengrenze i ein Kegelschnitt auf. Im Falle einer Mittelpunktfläche Φ ist auch der Grunriß von i ein Kegelschnitt, dessen eine Achse zum Grundriß der Lichtrichtung l parallel ist. Das von den Böschungslinien einer bestimmten Neigung im Grundriß erzeugte Richtungsfeld besitzt dann eine Drehschar von konzentrischen Kegelschnitten zu Isoklinen, wobei die Richtung der Linienelemente jeweils zu einer Achse parallel ist (Abb. 1 u. 2). Damit ist aber die Sachlage der Sätze 1b oder 2b gegeben, und deren Anwendung führt jetzt — unter Einschluß aller Grenzfälle — auf

Satz 3: *Die Grundrisse der Böschungslinien einer Drehquadrik mit lotrechter Achse sind Zykloiden, Pseudozykloiden oder deren Grenzformen.*

Die Art der Grundrisse der Böschungslinien auf den verschiedenen Drehquadriken läßt sich durch Beurteilung der Realitäts- und Größenverhältnisse sofort angeben. Die Ergebnisse sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

1. *Drehellipsoid* . . . . . *Epizykloiden* (Abb. 1),
2. *Einschaliges Drehhyperboloid*
   a) Böschungslinien steiler als die Flächenerzeugenden . . . . . *Hypozykloiden*,
   b) Böschungslinien flacher als die Flächenerzeugenden . . . . . *Hyperzykloiden* (Abb. 2),
3. *Zweischaliges Drehhyperboloid* . . . . . *Parazykloiden*,
4. *Drehparaboloid* . . . . . *Kreisevolventen*,
5. *Drehkegel* . . . . . *logarithmische Spiralen*.

Buchbesprechungen.

Das „physikalische Modell" und die „metaphysische Wirklichkeit". Versuch einer Metaphänomenologie. Von *E. Nickel.* („Glauben und Wissen": Nr. 9.) 100 S. München-Basel: E. Reinhardt Verlag. 1952. DM 4.20, geb. DM 5.80.

„Es soll also weder Naturphilosophie begründet noch irgendein metaphysischer Beweis angetreten werden. Es geht vielmehr um das Verstehen" (aus der Einführung S. 9). Rezensent, der sich gelegentlich mit Fragen der Naturphilosophie und mathematischen Philosophie beschäftigt und daher derartigen Untersuchungen nicht ganz ferne steht, hat sich um das Verstehen der Ausführungen des Autors bemüht. Um es ehrlich zu sagen: Meist ohne Erfolg. Es sei erlaubt, einen Satz (unter vielen) zu zitieren. „Also der Mensch: eingespannt in seine Raumzeitlichkeit in das Integral zwischen Geburt und Tod, angelegt zur Extrapolation des Woher und Wohin, und zu Integration des „als was?" " (S. 66). Der Inhalt: Die Welt als Gegebenheit und Problem. Die Welt als Äußerung metaphysischer Prinzipien. Die Welt als Werk Gottes. Die Welt in ihrer metaphysischen Dimension.

L. Schmetterer, Wien.

Entelechie. Von *A. Mittasch.* („Glauben und Wissen": Nr. 10.) 60 S. München und Basel: E. Reinhardt Verlag. DM 3.20.

Der Verfasser schreibt im Vorwort: „Als einzige Möglichkeit, den Streit (nämlich zwischen den Auffassungen des Mechanismus und des Vitalismus) endgültig zu beenden, erscheint strenge Begriffsbestimmung". Es wird daher den an strenge Begriffe gewöhnten Mathematiker interessieren, wie der Begriff der Entelechie, den der Autor in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen stellt, definiert wird, und zwar „als durchaus berechtigter Grenzbegriff strenger biologischer Wissenschaft" (S. 32): „Die Summe oder das Integral aller im Organismus tätigen und chemisch-physikalische Beschreibbarkeit übersteigende Auslöse-, Richt-, Gestaltungs- und Entwicklungskräfte" (S. 22). Es sei noch erwähnt, daß der Autor einen reichen Zitatenschatz aufgenommen hat und damit Vertreter der verschiedensten Anschauungen zu Worte kommen läßt, soferne sie zumindest seinem Standpunkt nicht diametral entgegengesetzt sind. *L. Schmetterer*, Wien.

Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt. I. Von *W. Krull.* Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Band 930.) 136 S. Berlin: W. de Gruyter. 1952. DM 2.40.

Der Verfasser hat im Jahre 1939 in der Sammlung Göschen ein Buch mit dem Titel „Elementare Algebra vom höheren Standpunkt" herausgegeben, das allgemein sehr beifällig aufgenommen wurde. (Besprechung in dieser Zeitschrift: Mh. Math. 49,5 (1941)). Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten zwar nicht in der Hauptaufgabe, wohl aber in vielen Details. Wieder bemüht sich der Verfasser, die nicht-lineare Algebra, insbesondere die Gleichungstheorie zu behandeln und durch die Form der Darstellung den Leser in die moderne abstrakte Denkweise einzuführen. Wieder steht im Vordergrund

der für die moderne Algebra grundlegende Körperbegriff. Neu sind im Abschnitt I die Paragraphen über Quotientenkörperbildung und Restklassen nach ganzen Zahlen, Körper von Primzahlcharakteristik. Der Abschnitt II über Nullstellen und Zerlegung von Polynomen ist im wesentlichen geblieben. Doch wurden alle Aufgaben (nicht nur hier, sondern im ganzen Band) weggelassen. Die Sätze von *Sturm*, *Fourier* und *Descartes* über die Anzahl der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen werden bereits hier gebracht. Abschnitt III handelt wieder von der Auflösung der Gleichungen ersten bis vierten Grades durch Radikale. Die Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades wird diesmal als bekannt angenommen, doch bringt § 15 wichtige Zusammenhänge zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungssystemen, die später im § 21 bei der Lösung zweier simultaner quadratischer Gleichungen mit Vorteil verwendet werden. Abschnitt IV bringt wieder die höhere Gleichungstheorie (Wurzelexistenzsatz, Resolventenbildung, zyklische Gleichungen), aber in vielfach neuer Darstellung, z. B. Gradtheorie. Abschnitt V handelt wieder von der Kreisteilungstheorie. Während bisher Abschnitt VI der numerischen Wurzelberechnung gewidmet war, bringt nun der sechste Abschnitt die Hauptsätze der Galoisschen Theorie in körpertheoretischer Behandlung. Gruppentheorie wird nur wenig gebracht. Bei dem beschränkten Umfang des Bandes konnten nicht alle Sätze der Galoisschen Theorie vollständig bewiesen werden, doch erlangt der Leser Verständnis für die schwierige Theorie. Im Anhang wird wieder der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra vom modernen Standpunkt behandelt. Auch die neue Auflage verdient wärmste Empfehlung.

N. Hofreiter, Wien.

Introduction to Modern Prime Number Theory. Von *T. Estermann*. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Herausgegeben von W. V. D. Hodge: Nr. 41.) XI, 75 S. Cambridge: At the University Press. 1952. 12 s. 6 d. net.

Das vorliegende Buch soll einen gut lesbaren Zugang zu einigen Resultaten der modernen Primzahltheorie bieten. Der Titel des Buches ist vielleicht nicht ganz eindeutig, denn vieles, was über Primzahlen bekannt ist, kann in dem Büchlein nicht gebracht werden. Vielmehr ist eine gewisse Auswahl des Stoffes getroffen. Es handelt sich durchweg um Resultate, die mit analytischen Methoden gewonnen werden. Das erste Kapitel bringt den Primzahlsatz mit dem Restglied von *de la Vallee-Poussin*. Kap. 2 ist dem Beweis des Resultates von *Siegel* und *Walfisz* über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression gewidmet. Diesen Beweis hat der Verfasser selbst wesentlich vereinfacht. Die Theorie der L-Reihen wird hier ab ovo entwickelt, so daß nur ein Minimum an Vorkenntnissen nötig ist. Das letzte Kapitel bringt den Beweis des Satzes von *Goldbach-Vinogradoff*: Jede genügend große ungerade Zahl ist als Summe von drei Primzahlen darstellbar. Dieser berühmte Satz ist das Endziel des Buches.

Als einer der besten Kenner und Förderer der analytischen Methoden erscheint der Autor besonders dazu berufen, diese Dinge in einem Buch darzustellen, um so mehr als moderne Bücher über diesen Gegenstand bisher nur in russischer Sprache verfügbar waren. Alle Leser, die für die Theorie der Primzahlen Interesse haben, werden ihm dafür sehr dankbar sein.

K. Prachar, Wien.

Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper. Von *H. Hasse*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, herausgegeben von der deutschen Akademie

der Wissenschaften zu Berlin; II. Abteilung: Band I.) XIX, 190 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1952. $ 6.48.

Das Buch stellt eine Ergänzung zu *Hilberts* Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper und zu *Hasses* Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper (Klassenkörpertheorie und Reziprozitätsgesetz) dar. Während in diesen Berichten, besonders bei *Hilbert* die allgemeinen Sätze ganz im Vordergrund stehen, Details und numerische Beispiele zurücktreten, wird in dem neuen Buch *Hasses* die explizite Behandlung stark betont. Das Numerische kommt wieder zu seinem Recht. Das Buch entwickelt die Grundlagen für die systematische Berechnung der Klassenzahl absolut abelscher Zahlkörper. Die analytische Klassenzahlformel ist für die tatsächliche arithmetische Berechnung der Klassenzahl noch wenig geeignet. Erst eine Umgestaltung der Formel führt zu tieferer Einsicht in die arithmetische Struktur und zu wirklicher arithmetischer Berechnung der Klassenzahl. Erst jetzt tritt die Ganzzahligkeit klar hervor. In souveräner Beherrschung der modernen algebraischen und zahlentheoretischen Theorien gelingt es *Hasse*, die schwierige Materie durchsichtiger zu gestalten und in einer besonders für den Zahlentheoretiker befriedigenderen Weise darzustellen. Es wird ein systematisches strukturinvariantes Verfahren zur numerischen Berechnung der Klassenzahlen aufgestellt. Auf Grund der entwickelten Methoden und Formeln gelingt es für die absolut zyklischen Zahlkörper, Tafeln zu berechnen, wie sie *Sommer* für die quadratischen Zahlkörper in seinem Lehrbuch gegeben hat. Sie enthalten Relativklassenzahlbeiträge der Charaktere und Relativklassenzahlen für alle abelschen Zahlkörper mit Führern unter 100. Neben der Hauptaufgabe der Berechnung der Klassenzahl abelscher Zahlkörper enthält das Buch eine Fülle von interessanten zahlentheoretischen Sätzen, auf die einzugehen, zu weit führen würde. Die algebraische Struktur der Körper wird durch graphische Skizzen anschaulich illustriert, wie dies *Hasse* auch früher schon mit Erfolg getan hat. Das Buch setzt vom Leser einige Kenntnisse aus Algebra und Zahlentheorie voraus, bietet aber einem solchen Leser ungemein viel.

N. Hofreiter, Wien.

Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern. Von *H. Hasse*. (Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften: Nr. 1.) 20 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1952. $ 0.52.

Es werden Verallgemeinerungen der von *E. Hecke* eingeführten Gaußschen Summen über algebraischen Zahlkörpern K betrachtet. Diese neuen Gaußschen Summen bei festem Normalkörper N/K bilden ein Größensystem von analoger gruppentheoretischer Struktur wie die Artin'schen Führer und L-Funktionen zu den Charakteren der Galoisschen Gruppe von N/K. Sie besitzen ferner eine Zerlegung in Komponenten nach den endlichen Primstellen von K. Die vorliegende Arbeit stellt einen vorläufigen, skizzenhaften Bericht dar, eine ausführliche Darstellung folgt später.

N. Hofreiter, Wien.

Höhere Mathematik. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil IV, Heft 1/2: Übungsaufgaben zu Teil I. Sechste Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 33/34.) Mit 97 Textabb., 109 S. DM 3.20. — Teil IV, Heft 3/4: Übungsaufgaben zu Teil II. Fünfte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 35/36.) Mit 51 Textabb., 108 S. — DM 3.20. — Leipzig-Berlin: B. G. Teubner. 1952.

Wir stellen mit Freude fest, daß auch die Aufgabensammlungen zu Teil I und II in neuer Auflage erschienen sind. Da keine wesentlichen Änderungen vorliegen, so verweise ich auf die letzte Besprechung in Mh. Math. 55, 97—98. (1951). *N. Hofreiter*, Wien.

Inequalities. Von *G. H. Hardy, J. E. Littlewood* und *G. Pólya*. Zweite Auflage. Mit 4 Textabb., XII, 324 S. Cambridge: At the University Press. 1952. Geb. 27 s. 6 d. net.

Die Verfasser haben sich im großen und ganzen darauf beschränkt, Ungleichungen zu betrachten, die in der reellen Analysis eine Rolle spielen. Ungleichungen also, die speziell in der Zahlentheorie, Algebra oder Funktionentheorie vorkommen, werden i. a. nicht betrachtet. Genaue Grenzen lassen sich natürlich nicht ziehen. Die elementaren Ungleichungen wie: arithmetisch-geometrisches Mittel, Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung werden bereits im Kapitel II gebracht. Die nächsten vier Kapitel handeln von Mittelwerten von Funktionen und der Theorie der konvexen Funktionen. Sie bringen Anwendungen auf Differential- und Integralrechnung, Reihen und Integrationstheorie. Die Darstellung in den ersten sechs Kapiteln ist sehr ausführlich und umfassend. Von wichtigen Ungleichungen werden mehrere Beweise gebracht. Die Kapitel VII—X führen weiter und sind nicht mehr so umfassend. Sie stellen Einführungen in gewisse Zweige der Analysis, z. B. Variationsrechnung dar, wo Ungleichungen eine große Rolle spielen. Das Buch schließt mit einem reichen Schriftenverzeichnis. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten 1934 erschienenen durch Aufnahme von 3 Anhängen. Das Buch ist für jeden Mathematiker von großem Interesse und ob seiner ausgezeichneten Darstellung auch für jeden Mathematiker geeignet. *N. Hofreiter*, Wien.

Lezioni sulla Teoria Moderna dell'Integrazione. Von *M. Picone* und *T. Viola*. 404 S. Edizioni Scientifiche Einaudi. 1952. Lire 5000.—.

Die Theorie des Lebesgue-Stieltjesschen Integralbegriffes hat in Italien eine selbständige Entwicklung erfahren, die mit *L. Tonellis* origineller Behandlung des Integralbegriffes von *Lebesgue* in seiner Variationsrechnung einsetzt. Die beiden Autoren des vorliegenden Werkes haben nun einen systematischen Neuaufbau der gesamten Theorie erbracht, dessen Grundlage die Behandlung der allgemeinen additiven Intervallfunktionen bildet. Ein methodisch wichtiger Zug ist bei diesem Aufbau die durchgängige Benützung eines von *M. Picone* stammenden, auf Integraloperationen zugeschnittenen, sehr allgemeinen Limesbegriffes (Limes bezüglich einer geordneten Menge von Operationen), durch dessen systematische Verwendung eine große methodische Einheitlichkeit erreicht wird.

Der Aufbau der Theorie erfolgt in der Weise, daß zunächst Riemann-Stieltjessche Integrale mit additiven Intervallfunktionen studiert werden; hernach werden aus solchen Intervallfunktionen abgeleitete total-additive Mengenfunktionen betrachtet, die als „masse lebesghiane" bezeichnet werden. Dann wird der Integralbegriff von Lebesgue-Stieltjes nach Art von *Tonelli* auf dem Begriff der quasi-stetigen Funktion aufgebaut. Es folgen die wichtigsten Anwendungen (Integration der Folgen, Hilbertscher Raum, Reduktion vielfacher Integrale) sowie die allgemeine Theorie der total-additiven Mengenfunktionen; die letztere wird in den von *T. Viola* verfaßten drei Schlußkapiteln des Buches besonders hinsichtlich der Deriviertenbildung eingehend behandelt.

Das inhaltreiche und vorbildlich ausgestattete Buch kann zum Eindringen in den Ideenkreis der modernen Integrationstheorien wärmstens empfohlen werden. *J. Radon*, Wien.

Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen. Von *H. Bückner*. („Ergebnisse der angewandten Mathematik", unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von F. Lösch: Heft 1.) Mit 1 Textabb., VI, 127 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 18.60.

Wenn auch die praktische Behandlung der Integralgleichungen keineswegs ein abgeschlossener Zweig der Mathematik ist, so ist ein Bericht darüber sehr erwünscht. Das Buch beschränkt sich im wesentlichen auf die linearen Integralgleichungen zweiter Art (Fredholmsche Integralgleichungen) und gibt ein umfassendes Bild von den bisher entwickelten Methoden. Sie zerfallen in zwei große Kategorien, und zwar in die Iterationsverfahren und in die Kernersatzmethoden. Abschnitt I gibt eine Übersicht über wichtige Ergebnisse über die Integralgleichungen zweiter Art. Abschnitt II handelt von der Berechnung der Eigenwerte, ferner von Variationsprinzipien und Einschließungssätzen. Der dritte Abschnitt ist den Iterationsverfahren gewidmet, die schon seit langer Zeit benutzt werden, um Eigenwerte und Eigenfunktionen näherungsweise zu berechnen. Der vierte Abschnitt bringt die Kernersatzmethoden. Es soll dabei der gegebene Kern $K(s, t)$ durch einen neuen Kern $K^*(s, t)$ so ersetzt werden, daß sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $K^*(s, t)$ möglichst wenig von den Eigenwerten und Eigenfunktionen von $K(s, t)$ unterscheiden, der neue Kern aber zu einer Integralgleichung führt, die sich numerisch leichter als die gegebene behandeln läßt. Man kann die Ersatzmethode auch auf die Störfunktion der gegebenen Integralgleichung ausdehnen, um eine einfachere Behandlung der inhomogenen Gleichung zu erreichen. Die Ersatzmethode wird auch bei vielen numerischen Methoden angewandt (z. B. bei der Störungsrechnung, bei den Analogieverfahren, beim Ritzschen Verfahren usw.). Der dritte und vierte Abschnitt sind am umfangreichsten, da sie doch die wichtigsten Methoden zur praktischen Behandlung der Integralgleichungen darstellen. Der fünfte Abschnitt handelt von speziellen Kernen, die einfache Mittel zu ihrer praktischen Behandlung zulassen. Das Buch, dessen Autor selbst wertvolle Beiträge zur Theorie der Integralgleichungen verfaßt hat, ist klar geschrieben. Über manches wird nur referiert, vieles wird ausführlich dargestellt. Weitgehend wird von der Operatorschreibweise Gebrauch gemacht, die viele Formeln einfacher und klarer erkennen läßt. Wertvoll sind auch die zahlreichen Beispiele und das große Literaturverzeichnis. *N. Hofreiter*, Wien.

Elements of Statistics. Von *C. G. Lambe*. Mit Textabb., VIII, 112 S. London-New York-Toronto: Longmans, Green and Co. 1952.

Es handelt sich um ein elementares Lehrbuch der Statistik, welches durch eine große Anzahl numerischer Beispiele dem Leser Verständnis für die wichtigsten Techniken nahebringen soll, z. B. die Anfangsgründe der Stichprobentheorie, Fragen der Qualitätskontrolle, insbesondere das Anlegen von Kontrollkarten u. a. Dort wo mathematische Entwicklungen angedeutet werden, rangiert stets Anschaulichkeit vor Strenge. Die voraussetzungslose Darstellung ist für ein breites, mathematisch nicht interessiertes Leserpublikum geeignet.

L. Schmetterer, Wien.

Methods of Algebraic Geometry. Band 2. Von *W. V. D. Hodge* und *D. Pedoe*. IX, 394 S. Cambridge: At the University Press. 1952. 42 s. net.

Der zweite Band des auf drei Bände berechneten Werkes ist der Untersuchung der algebraischen Mannigfaltigkeiten gewidmet. Der erste Teil bringt die allgemeine Theorie, der zweite Teil die Anwendung der Theorie auf wichtige spezielle Mannigfaltigkeiten. Das erste Kapitel (Kap. X) bringt Definition und

Eigenschaften der Begriffe: Mannigfaltigkeit, allgemeiner Nullpunkt, Dimension, zugeordnete Form (die hier Cayley-Form genannt wird), relative und absolute Irreduzibilität. In Kap. XI wird die Theorie der algebraischen Korrespondenzen entwickelt (Prinzip der Konstantenzählung, Segre'sche Mannigfaltigkeiten usw.). Auch der Begriff des normalen Problems wird hier erläutert. Weiters werden die sogenannten multiplikativen Mannigfaltigkeiten eingeführt. In Kap. XII werden der Schnitt von Mannigfaltigkeiten und der Multiplizitätsbegriff sowie Systeme von Mannigfaltigkeiten behandelt. In den Kapiteln XIII und XIV werden als Anwendung der allgemeinen Theorie die quadratischen Hyperflächen und die sogenannten Graßmannschen Mannigfaltigkeiten untersucht. Die Darstellung ist überall ausführlich und von großer Klarheit. Überall werden die modernsten Hilfsmittel verwendet. Besonders hervorzuheben ist die auf das Konkrete gerichtete Art der Schreibweise. Sicherlich ist das Werk hervorragend geeignet, ein gründliches Verständnis für die Methoden der algebraischen Geometrie zu vermitteln. Man kann auf den dritten Band gespannt sein, der vor allem die arithmetische Theorie bringen soll. *K. Prachar*, Wien.

Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie. Von *P. Jordan*. („Die Wissenschaft". Herausgegeben von W. Westphal: Band 107.) Mit 4 Textabb., VIII, 207 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1952. DM 15.80.

Das Werk gliedert sich in zwei Teile: „Die Riemann-Einsteinsche Theorie" und „Erweiterte Gravitationstheorie". Der erste Teil ist eine neue Darstellung der Einsteinschen Relativitätstheorie. Der Verfasser war bemüht, in möglichst einfacher und direkter Weise, unter Vermeidung langwieriger Rechnungen, die Riemannsche Geometrie und die Einsteinsche Theorie herzuleiten. Der Verfasser ist dabei in stetem Kontakt mit den allgemeinen mathematischen Theorien. So wird bei der Tensoralgebra auf den gruppentheoretischen Hintergrund (Darstellungstheorie) hingewiesen. Die alternierenden Differentiale von *E. Cartan* und die Theorie der Distributionen von *L. Schwartz* ,welche der Diracschen Funktion eine mathematische Fundierung gibt, werden erwähnt. Sehr klar sind die Ausführungen über die relativistische Kausalität, welche die Bedeutung der Untersuchungen von *K. Stellmacher* deutlich herausstellt.

Ausführlich wird das kugelsymmetrische Feld behandelt, welches den Einsteinschen Vakuum-Feldgleichungen genügt. Ein solches Feld ist nach einem Satz von *Birkhoff* stets statisch und wird durch die Schwarzschildsche Lösung gegeben. Daraus folgen drei Einsteinsche Effekte. Ebenso wird eine Reihe von exakten Lösungen der kovarianten Feldgleichungen (also mit Einschluß eines Maxwellfeldes und eines Strömungs- und Materiefeldes) besprochen bei Berücksichtigung der neuesten Literatur (*Schwarzschild*, *Tolmann*, *O. Klein*, *I. R. Oppenheimer* und *G. M. Volkoff*, kugelsymmetrisches Feld mit elektrischer Ladung nach *Reißner*, *Weyl*, *Nordström* und *Jefferey*), welche für die Bildung von Sternmodellen von Wichtigkeit sind.

Den Abschluß des ersten Teiles bildet die Besprechung kosmologischer Modelle und die Schwierigkeiten, welche bei Vergleichung mit dem empirischen Material auftreten.

Der zweite Teil des Buches bringt die erweiterte Gravitationstheorie, welche *Jordan* schon seit einiger Zeit vorgeschlagen hat, deren Ausgangspunkt die Hypothese von *Dirac* ist, nach der die Gravitationskonstante keine Konstante, sondern eine skalare Feldgröße ist, welche verkehrt proportional dem Weltalter ist und die Weltmasse dem Quadrat des Weltalters proportional ist. Dazu wird zunächst eine Umdeutung der Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen des materiefreien und ladungsfreien Vakuums im Sinne der projektiven Relativi-

tätstheorie von *Th. Kaluza*, *O. Klein* und *Veblen* gegeben, welche von der Tatsache ausgeht, daß die Feldgleichungen invariant sind gegenüber der Gruppe, welche durch die Transformation der Weltkoordinaten x und die Eichtransformation erzeugt wird. Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe $\mathfrak{H}$ aller Transformationen in 5 Variablen X, bei welcher die neuen Variablen homogene Funktionen ersten Grades in den alten Variablen sind. Die x sind also homogene Funktionen nullten Grades in den X. Dem Tensor wird jetzt der Projektor P gegenübergestellt, der sich, wenn er n obere und m untere Indizes besitzt, in den X^i gegenüber $\mathfrak{H}$ wie ein Tensor transformiert, aber homogen in den X vom Grade $n—m$ ist.

Weiters wird die Existenz einer fünfdimensionalen nicht ausgearteten symmetrischen Metrik angenommen, deren Komponenten g_{ik} einen Projektor bilden, also ist $J \Sigma g_{ik} X^i X^k$ eine Invariante. Durch die Operation der „Verkürzung" können die fünfdimensionalen Projektorgleichungen in vierdimensionale Tensorgleichungen übergeführt werden. Schwierigkeiten treten auf bei der Überführung von Projektorgleichungen mit kovarianter Differentiation in Tensorgleichungen, welche nur kovariante Ableitungen enthalten. Diese Anordnung ist sehr komprimiert und die eigentliche Bedeutung erscheint nicht sehr durchsichtig. Die Einstein-Maxwellsche Theorie wird nun erhalten, wenn die Forderung $J = 1$ gestellt wird.

(Bemerkung: Dies bedeutet in der Cartanschen Theorie der verallgemeinerten Räume, daß im Berührungsraum eine nichteuklidische Metrik herrscht). Die Jordansche Theorie besteht nun darin, daß die Forderung fallengelassen wird (*Einstein* und *P. G. Bergmann*, *Y. Thiry* haben ebenfalls eine solche Erweiterung in Angriff genommen) und damit zusammenhängend ein Variationsprinzip für die Feldgleichungen angesetzt wird, welches zwei Zahlparameter enthält, welche noch passend gewählt werden können. Der Verfasser gibt die Entwicklungen nur für den materiefreien Fall und verweist für den allgemeinen Fall auf das 1951 erschienene Buch von *G. Ludwig* „Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie" 1951 (Die Wissenschaft, Band 105).

Eine ausführliche Diskussion dieser Theorie, für welche *O. Heckmann* und *W. Fricke* das Analogon zur Schwarzschildschen Lösung aufstellen konnten, in Anwendung auf kosmologische Modelle (*G. Ludwig*, *Cl. Müller*, *Heckmann*) und im Vergleich mit den empirischen Daten, beschließt das Werk.

Das Buch ist in dem faszinierenden und anregenden Stil geschrieben, wie man ihn aus den Arbeiten und Büchern des Verfassers her kennt. Das Werk vermittelt einen leichten Zugang sowohl zur Einsteinschen Theorie wie zu der neuen Theorie des Verfassers. Das Studium dieses wichtigen Buches, welches nur bescheidene mathematische und physikalische Vorkenntnisse voraussetzt, kann allen Mathematikern, Physikern und Astronomen empfohlen werden

E. Hlawka, Wien.

Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen. Von *E. v. Angerer*. Herausgegeben von H. Ebert. Achte Auflage. 350 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1952. DM 14.80.

Die achte Auflage des zum praktischen Gebrauch für Experiment und Labor gedachten Buches wurde gegenüber den vorhergehenden Auflagen durch eine Vielzahl von experimentellen Kunstgriffen erweitert, insbesonders wurden, der modernen Entwicklung der Physik Rechnung tragend, neue Kapitel über Regeltechnik, Kerr- und Photozelle, Hochdrucktechnik, Uhrentechnisches, Magnetische Felder, tiefe Temperaturen, Röntgentechnisches, Elektronenmikroskopie und Kernphysik (Zählrohr, Nebelkammer) hinzugenommen. Auch die anderen Teile des Buches sind weitgehend umgearbeitet. Die Neuauflage

wurde nach dem Tode von *E. v. Angerer* von *H. Ebert* unter Mithilfe zahlreicher Fachwissenschaftler vorgenommen. Durch die Wahl des kleinen Formats bzw. Dünnpapiers wurde es auch äußerlich als handliches Experimentierbuch gekennzeichnet.

E. Höfinger, Wien.

Mechanik. Von *H. Ziegler*. Band III: Dynamik der Systeme. Mit 191 Textabb., 396 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 46.80.

Das vorliegende Werk stellt den letzten Band eines dreibändigen Gesamtwerkes dar, das den Titel „Mechanik" führt und eine Darstellung der elementaren Mechanik vermitteln will.

Der Band gliedert sich in die 3 Hauptabschnitte „Systeme mit endlichem Freiheitsgrad", „Schwingungen" und „Kontinua".

Der erste Abschnitt, der die Dynamik der Systeme von starren Körpern behandelt, führt sofort allgemeine Lagekoordinaten ein, die eine klare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebung ermöglichen. In Verbindung mit dem Prinzip von *d'Alembert* können hieraus alle Grundgleichungen für die Dynamik der Systeme einschließlich des Energiesatzes und der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen gewonnen werden. Die Kenntnis der letzteren muß, wie der Verfasser mit Recht betont, von den heutigen Ingenieuren verlangt werden.

Im zweiten Abschnitt wird die Theorie der Schwinger mit endlich vielen Freiheitsgraden sowie die der einfachen, kontinuierlichen Schwinger ziemlich ausführlich wiedergegeben, wobei methodisch an die Ergebnisse des ersten Abschnittes angeknüpft wird.

Im dritten Abschnitt werden die Kontinua zunächst unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen behandelt, um dann erst durch Spezialisierung den Übergang zu elastischen und plastischen Stoffen, zu Flüssigkeiten und Gasen durchzuführen. Hierbei wird von der Tensorrechnung ausgiebig Gebrauch gemacht.

Im Anhang findet sich ein kurzer Abschnitt über Tensoren, wobei sich der Verfasser auf kartesische Koordinatensysteme beschränkt und als Transformationen die Gruppe der Drehungen und Drehspiegelungen zuläßt.

Was bei der Lektüre des Werkes besonders angenehm auffällt, ist die begriffliche Klarheit in Verbindung mit großer Anschaulichkeit. Bei den abgeleiteten Sätzen wird der Gültigkeitsbereich genau begrenzt und die eingeführten Begriffe werden präzis definiert. Die mathematische Durchführung ist stets sauber und einwandfrei.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das vorliegende Werk eines der besten Kompendien der elementaren Mechanik darstellt, das die neuere Literatur bietet und seine Lektüre kann allen Interessenten nur dringend empfohlen werden.

G. Heinrich, Wien.

Physikalisches Wörterbuch. Herausgegeben von *W. H. Westphal*. Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10.500 Stichwörtern und 1595 Textabb., VII, 795 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. Geb. DM 148.—.

Die zweite Auflage des physikalischen Handwörterbuches von *A. Berliner* und *K. Scheel* erschien vor fast 20 Jahren. Die stürmische Entwicklung der Physik machte ein neues Werk dieser Art dringend erforderlich. Es mag ja kühn erscheinen, die ungeheure Stoffülle in Form eines Wörterbuches zusammenfassen zu wollen. Es ist aber dem Herausgeber und seinen Mitarbeitern gelungen, diese schwierige Aufgabe in hervorragender Weise zu lösen. Es ist ihnen gelungen, ein Werk zu schaffen, welches in aller Kürze aber doch in verständlicher Weise über jede physikalische Frage Auskunft gibt. Gegenüber dem früheren Handwörterbuch wurden die Gesetze der physikalischen Chemie und Astrophysik voll, die der Geophysik und Biophysik in gewissem Umfange berücksichtigt. Weiters wurde ein kurzer Abriß der Geschichte der Physik sowie eine Seite der

Lebensdaten von etwa 875 Physikern hinzugefügt, welche aber manche merkwürdige Lücken aufweist. Dagegen wurde die angewandte Physik nur soweit berücksichtigt, insofern sie für die Grundlagenforschung von Bedeutung ist. Aus der Mathematik wurde, nach dem Vorwort des Herausgebers, alles das aufgenommen, was der Physiker für seine Arbeit ständig braucht. Es ist natürlich unmöglich, im Rahmen dieser Besprechung auf den Inhalt dieses Werkes näher einzugehen. Es können nur einige Stichproben aus dem Gebotenen gegeben werden, die dem Leser dieser Zeitschrift nahe stehen. So soll nur hervorgehoben werden, daß die Abschnitte über die Quantentheorie der Wellenfelder ganz hervorragend sind, welche deutlich die Hand des Meisters verraten. Im Abschnitt „Hamiltonprinzip" ist die übliche, aber falsche Behauptung zu finden, daß die Wirkungsfunktion für die tatsächlich stattfindende Bewegung stets einen Extremwert annimmt. Im Abschnitt „Ergodenhypothese" ist die Ergodenhypothese nach *Boltzmann* und *Maxwell* mit der Quasiergodenhypothese verwechselt. Ein Beweis für die ursprüngliche Ergodenhypothese konnte nicht glücken, da sie falsch ist (*Plancherel* und *Rosenthal*). Durch die Arbeiten von *Birkhoff*, *E. Hopf*, *Chinčin* (vgl. das Buch über statistische Mechanik) und von *Neumann* ist die Ergodentheorie und statistische Mechanik auf eine einwandfreie Basis gestellt worden. Die Ansicht, daß die neueren physikalischen Statistiken die Ergodentheorie nicht benötigen, ist nicht richtig. Für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist die übliche Herleitung gegeben. Auf die einwandfreie Begründung von *Carathéodory* hätte hingewiesen werden können. (Diese ist durch die Darstellung von *Born* und *Madelung* leicht zugänglich.) Die *Dirac*sche Theorie der magnetischen „Punktpole" wurde nicht erst 1948, sondern bereits 1932 aufgestellt. Das WKB-Verfahren ist nicht vollständig angegeben: Es fehlt das K-Verfahren. Nebenbei bemerkt ist das Verfahren alt (vgl. z. B. *R. E. Langer*, Bull. Amer. **40** (1934), *H. Seifert*, Math. Zeitschrift **48** (1942)). Was die mathematischen Abschnitte anbelangt, wurde mehr aufgenommen als der Physiker braucht, z. B. Schranke und Schwankung einer Funktion, wobei Extremwerte und obere bzw. untere Grenze einer beschränkten Funktion als gleich angesehen werden. Auch der Abschnitt über den Funktionsbegriff ist anfechtbar. Bei der Definition des Grenzwertes von Funktionen fehlt die Bedingung $x \neq x_0$. Trigonometrische und Fouriersche Reihen werden in einen Topf geworfen, doch da dies für den Physiker belanglos ist, soll es nicht beanstandet werden. Bei der Diracfunktion hätte deutlicher hervorgehoben werden sollen, daß eine solche Funktion im mathematischen Sinne nicht existiert. (In jüngster Zeit hat *L. Schwartz* die Diracfunktion in seine Theorie der Distributionen eingeordnet). Der Abschnitt „Raum" mit seiner Definition des „vektoriellen" und „metrischen" Raumes ist meines Erachtens verunglückt. Der Abschnitt „Riemannsche Geometrie" könnte prägnanter gefaßt werden. Was die Wahrscheinlichkeitsrechnung anlangt, kann ich mir nicht vorstellen, daß die für ein Wörterbuch sehr umfangreichen (mehr als zwei Seiten) philosophischen Ausführungen, über welche man sehr verschiedener Meinung sein kann, für den Physiker von Interesse sind. Dagegen ist der mathematische Teil, der gerade ständig benötigt wird, nur kurz gestreift, und veraltet.

Diese Bemerkungen, welche fortgesetzt werden könnten, beeinträchtigen selbstverständlich in keiner Weise die Brauchbarkeit dieses hervorragenden Werkes, für welches wir dem Herausgeber zu Dank verpflichtet sind. Die Ausstattung des Buches ist, wie man es von dem Verlag gewohnt ist, ausgezeichnet. Dieses Buch benötigt keine Empfehlung, es empfiehlt sich selbst. Für jeden Naturwissenschaftler und naturwissenschaftlich interessierten Mathematiker ist dieses Werk unentbehrlich. *E. Hlawka*, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Moderne algebraische Geometrie

Die idealtheoretischen Grundlagen

Von

Dr. **Wolfgang Gröbner**

o. Professor der Mathematik an der Universität Innsbruck

XII, 212 Seiten. 1949

Steif geheftet S 78.—, DM 23.90, $ 5.70, sfr. 24.80

„...Das vorliegende Werk enthält eine systematische Darstellung der Polynomidealtheorie, wie sie sich, ausgehend von der grundlegenden Monographie von *F. S. Macaulay* (Algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts 19, Cambridge 1916) durch die Bemühungen zahlreicher jüngerer Algebraiker, nicht zuletzt des Verfassers, in den letzten Jahrzehnten weiterentwickelt hat. Die besprochenen Sätze werden sofort geometrisch gedeutet; dabei ist das Hauptziel die Festlegung eines rein algebraischen, eindeutigen Vielfachheitsbegriffes für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension... Das *Gröbner*sche Buch setzt wohl eine gewisse mathematische Reife des Lesers, aber keine speziellen algebraischen Vorkenntnisse voraus. Alle nötigen Hilfssätze aus der Ideal- und Körpertheorie werden, wenn auch in knapper Form, in den ersten Kapiteln hergeleitet..." *Archiv der Mathematik*

Grundlagen der höheren Geodäsie

Von

Dr. phil. **Friedrich Hopfner**

Professor der höheren Geodäsie und sphärischen Astronomie, Wien

Mit 26 Textabbildungen. VIII, 246 Seiten. 1949

S 126.–, DM 25.–, $ 6.–, sfr. 26.10; Halbleinen S 134.–, DM 27.–, $ 6.40, sfr. 27.80

„... Dieses Buch zeichnet sich vor allem durch seine klare Sprache aus, mit der die wirklich schwierige Materie geboten wird. Unmerklich wird der Leser an die großen Probleme der höheren Geodäsie herangeführt, so daß er förmlich überrascht ist, wenn er sich inmitten der schwierigsten Kapitel befindet. Dies gelingt dem Verfasser durch den logischen Aufbau und sparsamste Anwendung von mathematischen Formeln. Das Buch gewinnt damit nicht nur für den Geodäten, sondern vor allem für den Kollegen verwandter Wissenschaften, der sich für die mathematische und physikalische Erdmessung interessiert, an ganz besonderer Bedeutung."

Petermanns Geographische Mitteilungen